

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»**

Кафедра «Высшая математика»

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
Теория пределов и дифференциальное исчисление**

**Основные положения теории,
методические указания
и варианты расчетно-графических работ**



Москва 2008

УДК 517.91 (075)

Кафедра «Высшая математика» МГТУ «МАМИ»

«Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных». М., 2008

Авторы и составители:

Глава 1 – Короткова Н.Н..

Глава 2 – Теуш Б.Л..

Глава 3 – Теуш Б.Л., Ткаченко О.И..

Глава 4 – Ткаченко О.И..

Глава 5 – Бодунов М.А., Бородин С.И., Короткова Н.Н.,

Показеев В.В., Теуш Б.Л., Ткаченко О.И..

Под редакцией доцента кафедры «Высшая математика» МГТУ «МАМИ» Ткаченко О.И..

Издание седьмое, исправленное и дополненное.

Приведены краткие теоретические сведения по теории пределов и дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных. Изложение материала сопровождается подробным разбором решений типовых задач. Для самостоятельного решения приведены варианты расчетно-графических работ. Методические указания предназначены для студентов всех специальностей очной и очно-заочной форм обучения.

Авторы выражают благодарность сотрудникам каф. «Высшая математика» МГТУ «МАМИ» – доц. Н. Н. Пустовойтову, доц. Б.Ю. Кудрявцеву, доц. Л.К. Кийко, за полезные замечания при подготовке настоящего издания.



© Московский государственный технический университет «МАМИ», 2008.

Глава 1. Функция. Основные понятия

1.1. Функция одной переменной. Основные понятия

Определение 1.1. Пусть D , E – некоторые множества действительных чисел, такие, что каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное единственное число $y \in E$. В таком случае говорят, что на множестве D определена *числовая функция* y .

Символически функциональная зависимость между переменной y (функция) и переменной x (аргумент) записывается равенством: $y = f(x)$, где f обозначает совокупность действий, которые надо произвести над x , чтобы получить y . Символом $f(a)$ обозначается частное значение функции $y = f(x)$, т. е. то значение, которое принимает функция $y = f(x)$ при $x = a$.

Определение 1.2. Областью определения (существования) функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных значений аргумента x , при которых она имеет действительное значение, т.е. множество D (определение 1.1) – область определения функции $y = f(x)$.

Определение 1.3. Областью изменения или областью значений функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных значений функции y , которые она может принимать, т.е.
$$E = \{y \in R \mid y = f(x), x \in D\}.$$

Тогда символы $y = f(x)$ и $f : D \rightarrow E$ (отображение множества D на множество E) – идентичны. Наиболее распространенным является аналитический способ задания функции. Он состоит в том, что с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значений функции $y = f(x)$ для каждого из значений аргумента x . В этом случае область определения функции обычно не указывают, понимая под нею то множество значений аргумента x , для которого данная формула имеет смысл (“естественная” область определения функции).

Наиболее часто встречающиеся области определения функции – интервал и отрезок (замкнутый интервал).

Множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом*, что кратко записывается символом (a, b) . Конечные точки a и b в интервал не входят. Множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* (замкнутым интервалом), что кратко записывается $[a, b]$. Конечные точки a и b в отрезок входят. Множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < a$, $-\infty < x \leq a$; $a < x < +\infty$, $a \leq x < +\infty$ и $-\infty < x < +\infty$ называются *бесконечными интервалами* и обозначаются символами $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$ и $(-\infty; +\infty)$.

Пример 1.1. Найти естественную область определения D функции

$$y = \frac{1}{x-2}.$$

Решение. Область определения, очевидно, состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, т.к. выражение

$\frac{1}{x-2}$ не имеет смысла при $x=2$, а при всех остальных значениях x определено.

Пример 1.2. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{6x - x^2 - 5} + \arcsin \frac{x}{2} + 5.$$

Решение. Очевидно, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 6x - x^2 - 5 \geq 0 \\ \left| \frac{x}{2} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) \leq 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Следовательно, областью определения данной функции будет отрезок $[1; 2]$. Иногда функция задается на различных промежутках различными формулами. Тогда область определения такой функции есть совокупность этих промежутков.

Пример 1.3. Найти область определения функции

$$y = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } |x| \leq 1 \\ 5 + \log_{x-1} x, & \text{если } x > 1 \text{ и } x \neq 2 \end{cases}.$$

Решение. $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, или $x \in [-1; 1]$; $x > 1$ и $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$. Таким образом, область определения данной функции $D = [-1; 1] \cup (1; 2) \cup (2; +\infty) = [-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Определение 1.4.

Функция $y = F(x)$ называется *сложной*, если ее можно представить в виде $y = f(\varphi(x))$, где $f(u)$ – функция промежуточного аргумента u , а $f(\varphi(x))$ означает, что на место u ставится функция $\varphi(x)$. Например, $y = \sqrt{\sin x}$ – сложная функция, состоящая из двух функций: $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x$.

Аналогично определяется сложная функция, состоящая из большего числа композиций. Например, $y = \lg^2(x+1)$ – сложная функция, составленная из трех функций: $y = u^2$, $u = \lg v$, $v = x+1$.

Определение 1.5. Если функция $y = f(x)$ такова, что для любых $x_1 \neq x_2 \in D$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то в этом случае всякому числу $y \in E$ может быть поставлено вполне определенное единственное число $x = f^{-1}(y) \in D$, т.е. будет определена новая функция. Переобозначив, как принято, x на y , а y на x , получим функцию $y = f^{-1}(x)$, называемую *обратной* по отношению к $y = f(x)$.

Пример 1.4. Найти обратную функцию для $y = \frac{2x+3}{x-5}$.

Решение.

Практически, чтобы найти для функции $y = f(x)$, заданной с помощью формулы, обратную ей функцию $y = f^{-1}(x)$, нужно разрешить уравнение $y = f(x)$, относительно x , если это возможно. В данном примере

$$yx - 5y = 2x + 3, x(y - 2) = 5y + 3, x = \frac{5y + 3}{y - 2}. \text{ Затем, меняя обозначения } x \text{ на } y, y \text{ на } x, \text{ получим функцию } y = \frac{5x + 3}{x - 2}, \text{ обратную данной.}$$

Заметим, что не любая функция имеет обратную функцию. Условия существования обратной функции сформулированы в следующей теореме:

Теорема 1.1. Если функция $y = f(x)$ определена и строго возрастает (убывает) на промежутке D_1 и областью ее значений является промежуток E_1 ($D_1 \subset D$; $E_1 \subset E$ или $D_1 = D$; $E_1 = E$), то для нее существует обратная функция $y = f^{-1}(x)$, определенная и возрастающая (убывающая) на E_1 .

Например, функция $y = x^3$, рассматриваемая на множестве $D_1 = R$ с областью значений $E_1 = R$, имеет обратную функцию $y = \sqrt[3]{x}$, определенную на множестве $E_1 = R$.

Для функции $y = \sin x$ на отрезке $D_1 = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, принимающей значения $y \in E_1 = [-1; 1]$, обратной является функция $y = \arcsin x$, определенная на множестве $E_1 = [-1; 1]$.

Функция $y = 10^x$ с областью определения $D_1 = R$ и областью значений $E_1 = (0; +\infty)$, возрастающая на D_1 , обладает обратной функцией: $y = \lg x$, определенной и возрастающей на множестве $E_1 = (0; +\infty)$.

Учитывая вышеизложенное, видим, что равенство

$f(f^{-1}(x)) = x$ будет справедливо при $x \in E_1$, а $f^{-1}(f(x)) = x$ спра-

ведливо при $x \in D_1$. Например, $(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x$ при $x \in (-\infty; +\infty)$;

$\sin(\arcsin x) = x$ при $x \in [-1; 1]$; $\arcsin(\sin x) = x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$10^{\lg x} = x$ при $x \in (0; +\infty)$; $\lg(10^x) = x$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Определение 1.6. Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости XOY , координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Пример 1.5. Построить график функции $y = 3 + \sqrt{4-x} + 2\sqrt{x-4}$.

Решение. Областью определения данной функции является множество, состоящее из одного элемента $x = 4$, или $x \in \{4\}$. Так как

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{4\}.$$

Графиком данной функции

является точка $A(4; 3)$ (рис. 1.1).

Пример 1.6. Построить графики функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Данные функции являются взаимно обратными, определенными на всей числовой прямой (таблица 1.1).

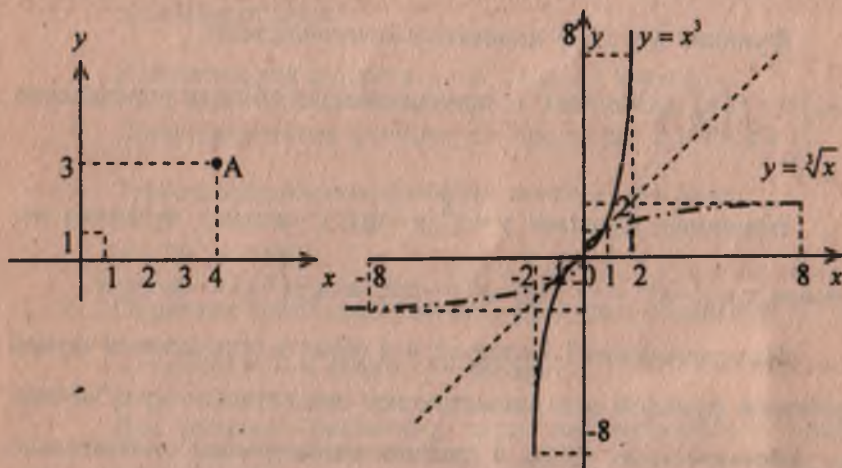


Рис. 1.1.

Рис.1.2.

Заметим, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис.1.2).

При исследовании функций важную роль играют некоторые свойства. Рассмотрим два из них (другие, не менее важные, будут рассмотрены далее в главах 2 и 3).

Определение 1.7. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любых x , принадлежащих области определения D .

Например, функции $y = x^4$; $y = \sin^2 x$; $y = \sqrt{x^2 + 1}$ являются четными, т.к. $(-x)^4 = x^4$; $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$; $\sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любых x , принадлежащих области определения D .

Например, функции $y = x^3$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \arcsin x$ являются нечетными, т.к. $(-x)^3 = -x^3$; $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Из определения 1.7 следует, что область определения четной и нечетной функций есть симметричное относительно нуля множество действительных чисел, а графики симметричны относительно оси OY для четных функции и начала координат для нечетных.

Определение 1.8. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (период функции) такое, что для всех $x \in D$ $f(x+T) = f(x)$.

Например, функция $y = \cos x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$, а функция $y = \sin 2x$ имеет период $T = \pi$.

Из определения следует, что если T – период функции, то $n \cdot T$, где $n \in \mathbb{Z}$, – также является периодом этой функции. Чаще всего из этого множества за период берут наименьший положительный. Его называют основным.

Основными элементарными функциями называются:

1. Постоянная (константа) $y = c$, где c – действительное число.
2. Степенная функция $y = x^a$, где a – действительное число, отличное от нуля.
3. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.
4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.
5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$,
 $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
6. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$,
 $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

Для решения различных задач математического анализа важно знать общий вид и расположение графиков основных элементарных функций и их свойства (приложение 11 – таблица основных элементарных функций).

Определение 1.9. Функция y аргумента x называется *элементарной*, если на всей области определения она задается одной формулой $y = f(x)$, притом правая часть аналитического выражения $y = f(x)$ составлена из основных элементарных функций с помощью приме-

нения конечного числа четырех арифметических действий и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз.

$$\text{Например, } y = \sqrt{\lg(1 + \cos^2 x)}; y = \frac{(x+1)^{1/2} - \left(2 - \frac{1}{\cos x}\right)^{1/3}}{(x^3 + 1)^{2/5} - x^3} -$$

элементарные функции, а функции

$$y = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{x \sin x}, & \text{если } x \in (0; +\infty) \end{cases} \text{ и } y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x, \text{ где } x \in \mathbb{N} \text{ не}$$

являются элементарными.

Определение 1.10. Алгебраическими называются элементарные функции, над аргументом которых производят конечное число арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в рациональную степень).

$$\text{Например, } y = x^2 - 2\sqrt{x} + 1; y = \frac{5x^3 - 1}{x + 2} - \text{ алгебраические}$$

функции.

Трансцендентными называются неалгебраические функции.

$$\text{Например, } y = 3^x; y = \log_3 \sqrt{x}; y = \operatorname{tg}^2 x; y = \arcsin x \sqrt{x-1} -$$

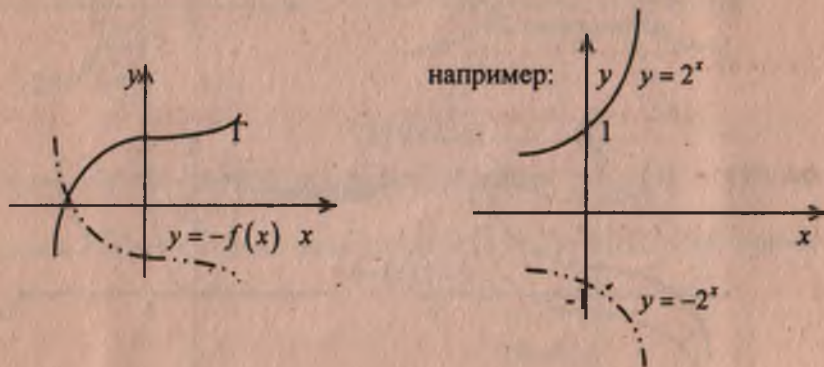
трансцендентные функции.

1.2. Построение графиков функций

Общая схема построения графиков функций с использованием дифференциального исчисления будет дана далее в гл. 3. Здесь же будут рассматриваться те графики, построение которых основано на непосредственном исследовании функции и применении методов аналитической геометрии (параллельный перенос, растяжение или сжатие). К непосредственному построению графиков относятся известный из школы способ построения графика “по точкам”, применение графиков основных элементарных функций, использование той или иной симметрии графика или его периодичности (если таковые имеются), графическое сложение, вычитание, умножение и деление и некоторые другие приемы.

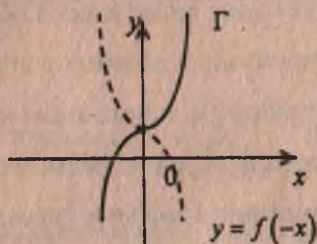
Исходя из графика функции $y = f(x)$ – кривая (Γ) – и используя простые геометрические рассуждения, нетрудно убедиться, что

- 1) график функции $y = -f(x)$ есть зеркальное отображение Γ относительно оси OX :

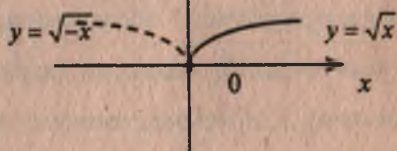


2) график функции

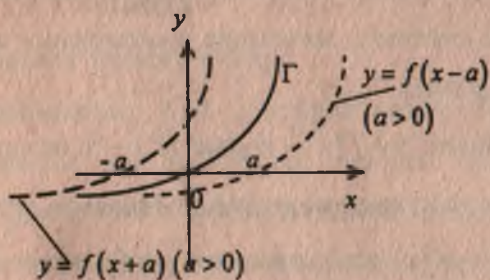
$y = f(-x)$ – зеркальное отображение Γ относительно оси OY :



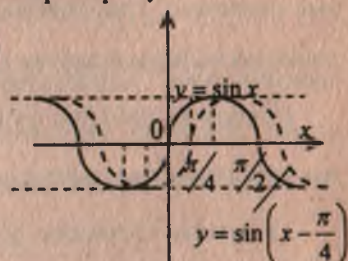
например:



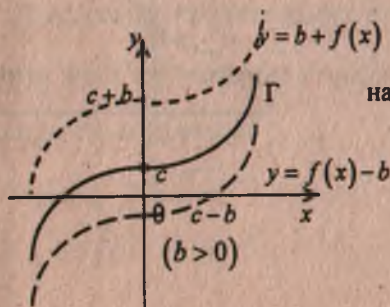
3) график функции $y = f(x-a)$ – смещение Γ вдоль оси OX на величину a :



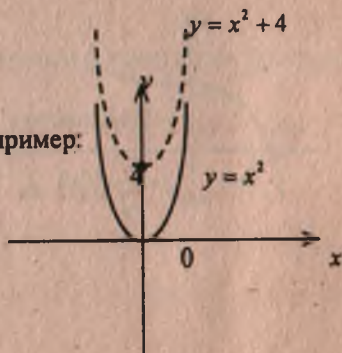
например:



4) график функции $y = b + f(x)$ – смещение Γ вдоль оси OY на величину b :



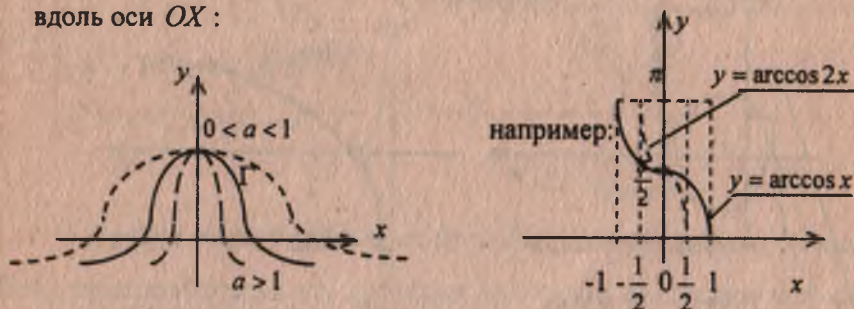
например:



5) график функции $y = f(ax)$, $a > 0$; $a \neq 1$

– сжатие в a раз (при $a > 1$) или растяжение в $\frac{1}{a}$ раз (при $a < 1$)

вдоль оси OX :



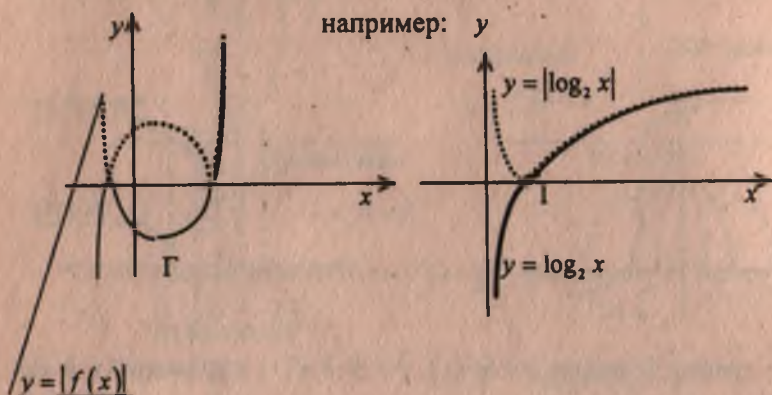
6) график функции $y = bf(x)$, $b > 0$; $b \neq 1$ – растяжение в b раз

(при $b > 1$) или сжатие в $\frac{1}{b}$ раз (при $b < 1$) Γ вдоль оси OY .



Таким образом, можно по графику функции $y = f(x)$ – (Γ) построить график функции вида $y = Af(k(x-a)) + b$ (см. далее пример 1.7)

- 7) график функции $y = |f(x)|$ совпадает Γ , где $f(x) \geq 0$ и симметричен Γ относительно OX , где $f(x) < 0$.



- 8) график функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси OY , причем, совпадает с Γ при $x \geq 0$.



Пример 1.7. Построить график функции $y = |x| + |x^2 - 1|$.

Решение. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, т.е. $D = R = (-\infty; +\infty)$. Раскрывая модули, можем записать:

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \in (-\infty; -1] \\ -x^2 - x + 1, & x \in (-1; 0] \\ -x^2 + x + 1, & x \in (0; 1] \\ x^2 + x - 1, & x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

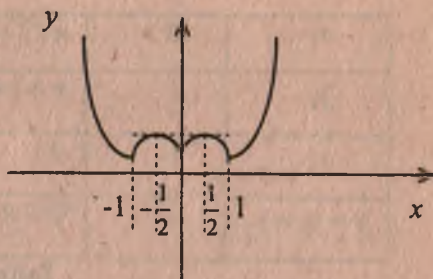


Рис. 1.3.

График заданной функции есть объединение графиков (парабол), представляющих эту функцию на каждом из четырех промежутков (рис. 1.3). Отметим, что функция четная и ее множество значений $E = [1; +\infty)$.

Пример 1.8. Построить график функции $y = 2x + 1 + \cos x$.

Решение. Областью определения является множество всех действительных чисел, т.е. $D = R = (-\infty; +\infty)$. График данной функции можно построить путем сложения графиков двух функций: $y_1 = 2x + 1$ и $y_2 = \cos x$, т.е. $y = y_1 + y_2$. График первой функции есть прямая, ее можно построить по двум точкам: $(0; 1)$; $(-0.5; 0)$.

График второй функции – косинусоида (таблица 1.1). Ордината любой точки графика заданной функции равна сумме ординат соответствующих точек на графиках вспомогательных функций. Отметим также характерные точки искомого графика (рис. 1.4), построить которые достаточно просто:

x	0	$\pi/2 + \pi n, n \in Z$	-0,5
y_1	1	$\pi + 1 + 2\pi n, n \in Z$	0
y_2	1	0	$\cos 0,5$
$y = y_1 + y_2$	2	$y = y_1$	$y = y_2$

Таблица 1.1.

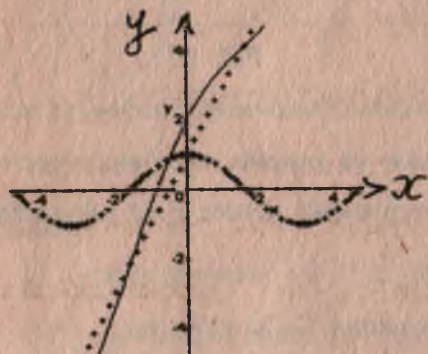


Рис. 1.4.

Пример 1.9. Построить график функции $y = x + \sqrt{1 - |\sec x|}$.

Решение. Областью определения является множество

$$D = \{x \mid x = \pi n, n \in Z\} = \{0; \pm \pi; \pm 2\pi; \dots\}, \text{ так как:}$$

$$\begin{cases} 1 - |\sec x| = 1 - \frac{1}{|\cos x|} \geq 0 \\ |\cos x| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |\cos x| = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1 \text{ и } x = \pi n, n \in Z.$$

Графиком данной функции является множество точек $M(\pi n; \pi n)$, где $n \in Z$ (рис. 1.5).

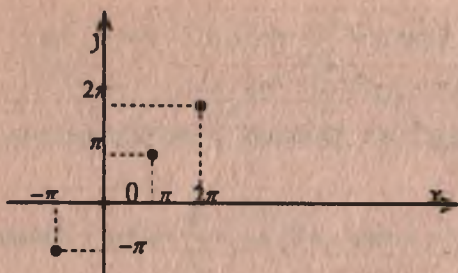


Рис.1.5.

Пример 1.10. Построить график функции $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Решение. Областью определения функции является множество

$$D = \{x \mid \sin x \neq 0, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

График данной функции можно построить, используя график функции $y_1 = \sin x$. Ордината любой точки

графика функции $y = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{y_1}$ является числом, обратным соответствующей ординате вспомогательной функции $y_1 = \sin x$ (рис.1.6).

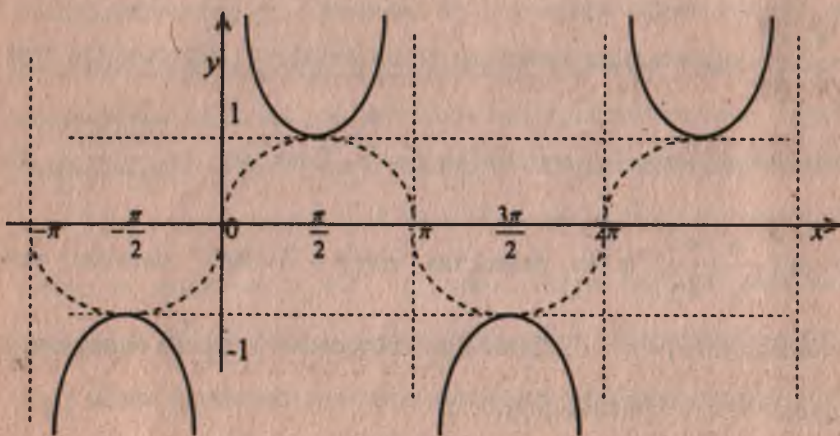


Рис.1.6.

Отметим характерные точки. При $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $y = y_1$, т.к.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. При $x = \pi n$ функция y не определена, но,

очевидно, при $x \rightarrow \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $y_1 = \sin x \rightarrow 0$, а $y = \frac{1}{y_1} \rightarrow \pm\infty$. Анализи-

руя построенный график, можем отметить, что функция является нечетной и периодической. Область значений функции $E = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Пример 1.11. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой $D = R = (-\infty; +\infty)$. В силу периодичности функции $y = \sin x$, заданная функция также периодична с периодом $T = 2\pi$. Поэтому достаточно построить график на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На отрезке

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ справедливо равенство $\arcsin(\sin x) = x$, поэтому для этих

значений x имеем $y = \arcsin(\sin x) = x$. Если же $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то

$\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и из равенства $\sin(\pi - x) = \sin x$ следует, что

$y = \arcsin(\sin x) = \pi - x$. Далее при построении графика используем периодичность функции (рис.1.7).

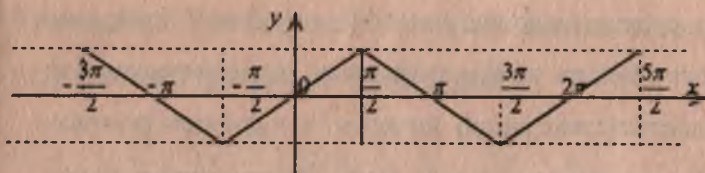


Рис. 1.7.

Глава 2. Предел числовой последовательности.

Предел функции. Непрерывность функции.

2.1. Числовая последовательность и ее предел

Определение 2.1. Пусть каждому натуральному числу n (т.е. $n = 1, 2, 3, \dots$) по некоторому закону поставлено в соответствие действительное число a_n . Тогда говорят, что задана *числовая последовательность*: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, обозначаемая (a_n) . Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются членами последовательности: a_1 – первым членом последовательности, a_2 – вторым, a_n – n -м или общим членом последовательности. Всюду в дальнейшем числовую последовательность будем называть для краткости последовательностью. Последовательность может быть задана с помощью формулы вида $a_n = f(n)$, выражающей n -й член последовательности через его номер n , например $a_n = 2^n$, $a_n = \sin n$. Такую формулу называют формулой общего члена последовательности. Последовательность (a_n) может задаваться другими способами, например рекуррентными формулами, т.е. формулами, выражающими n -й член последова-

тельности через предшествующие члены (с меньшими номерами). Примерами могут служить арифметическая и геометрическая прогрессии. Закон соответствия между номером n и соответствующим членом последовательности a_n может быть самым разным. Например, возможно его словесное описание: a_n — n -я цифра десятичной записи числа π .

Пример 2.1. Написать первые четыре члена последовательности (a_n) , если:

1) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 2) a_n — n -й десятичный знак числа e ;

3) $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + 2$.

Решение. а) последовательность задана формулой ее общего члена, чтобы получить член последовательности с конкретным номером, надо подставить его в формулу вместо произвольного номера n .

Получим $a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$; $a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$;

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

б) Известно, что $e = 2,71828\dots$. Следовательно,

$$a_1 = 2; a_2 = 7; a_3 = 1; a_4 = 8.$$

в) Здесь последовательность задана рекуррентной формулой. Поскольку $a_1 = 1$, то $a_2 = a_{2-1} + 2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$;

$$a_3 = a_{3-1} + 2 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5; a_4 = a_{4-1} + 2 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

Пример 2.2. Зная несколько первых членов последовательности (a_n) , написать формулу ее общего члена.

1) $\frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \frac{10}{13}; \frac{17}{18}; \frac{26}{23}$; 2) $1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; 4; \frac{1}{5}$.

Решение. 1) Числитель каждого из заданных членов последовательности равен квадрату номера этого члена плюс 1, т.е. $n^2 + 1$. Знаменатели же образуют арифметическую прогрессию 3, 8, 13, 18, ... с первым членом 3 и разностью 5, следовательно, знаменатель

n -й дроби будет $3 + 5(n - 1) = 5n - 2$. Поэтому $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n - 2}$.

2) В этом случае общий член последовательности можно записать с помощью двух формул: одной – для членов, стоящих на нечетных местах (1, 3, 5, ...), другой – для стоящих на четных местах (2, 4, 6, ...):

$$a_n = \begin{cases} k, & \text{при } n = 2k - 1 \\ \frac{1}{k + 1}, & \text{при } n = 2k \end{cases}, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots$$

Действия над последовательностями

Пусть (a_n) и (b_n) – две произвольные последовательности.

Тогда:

1) Суммой (a_n) и (b_n) называется последовательность (c_n) такая, что $c_n = a_n + b_n$.

2) Разностью (a_n) и (b_n) называется последовательность (c_n) такая, что $c_n = a_n - b_n$.

3) Произведением (a_n) и (b_n) называется последовательность (c_n) такая, что $c_n = a_n \cdot b_n$.

4) Частным (a_n) и (b_n) называется последовательность (c_n) такая, что $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ($b_n \neq 0$ для всех n).

5) Произведением числа λ и последовательности (a_n) называется последовательность (c_n) такая, что $c_n = \lambda a_n$.

Пример 2.3. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы формулами общего члена: $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = n^2$. Найти формулу общего члена последовательностей (c_n) равных:

$$1) (a_n) + (b_n); 2) (a_n) - (b_n); 3) (a_n) \cdot (b_n); 4) \frac{(a_n)}{(b_n)}; 5) 2(a_n) - \frac{1}{3}(b_n).$$

Решение. 1) $c_n = \sqrt{n} + n^2$; 2) $c_n = \sqrt{n} - n^2$; 3) $c_n = \sqrt{n} \cdot n^2 = n^{5/2}$;

$$4) c_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = n^{-3/2}; 5) c_n = 2\sqrt{n} - \frac{n^2}{3}.$$

2.2. Монотонные и ограниченные последовательности

Определение 2.2. Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной* (например $-2, -2, -2, \dots, a_n = -2$).

Определение 2.3. Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если для любого номера n справедливо неравенство $a_{n+1} > a_n$, и *убывающей*, если $a_{n+1} < a_n$.

Определение 2.4. Последовательность (a_n) называется *неубывающей*, если для любого номера n справедливо неравенство $a_{n+1} \geq a_n$, и *невозрастающей*, если $a_{n+1} \leq a_n$.

Например, последовательность $1, 4, 9, \dots; a_n = n^2$ возрастающая; по-

следовательность $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots; a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ убывающая; по-

следовательность $1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots; a_n = \frac{1}{[\sqrt{n}]}$, где $[\sqrt{n}]$ —

целая часть числа \sqrt{n} невозрастающая; последовательность

$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, \dots; a_n = [\sqrt{n}]$ неубывающая. Невозрастающие и

неубывающие последовательности называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие — *строго монотонными*.

Пример 2.4. Исследовать на монотонность последовательность с общим членом:

$$1) a_n = \frac{2n+1}{n+2}; 2) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Решение. 1) Рассмотрим разность $a_{n+1} - a_n$. Имеем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2) - (n+3)(2n+1)}{(n+3)(n+2)}.$$

Упростив числитель, получим $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$,

т.е. $a_{n+1} < a_n$ для любого n , поэтому (a_n) является возрастающей.

2) Рассмотрим частное $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{(n+1)+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \cdot \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} < 1, \text{ так как } \sqrt{n+1} < \sqrt{n+2}, \sqrt{n} < \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Поскольку $a_n > 0$ для всех n , то $a_{n+1} < a_n$, поэтому (a_n) убывающая.

Определение 2.5. Последовательность (a_n) называется *ограниченной сверху (ограниченной снизу)*, если существует число M такое, что все ее члены меньше M , т.е. $a_n < M$ для любого n (соответственно $a_n > M$ для любого n).

Определение 2.6. Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. найдутся числа M_1 и M_2 такие, что для всех n выполняется неравенство $M_1 < a_n < M_2$, или, что то же самое, найдется число $M > 0$ такое, что для всех n выполняется неравенство $|a_n| < M$.

Определение 2.7. Последовательность (a_n) называется *неограниченной*, если для любого числа $M > 0$, можно найти такой номер n , что выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Например: 1) последовательность $2, 4, 6, 8, \dots; a_n = 2n$ ограничена снизу, $a_n > 1$, но не ограничена сверху; 2) последовательность $-1, -4, -9, -16, \dots; a_n = -n^2$ ограничена сверху, $a_n < 0$, но не ограничена снизу; 3) последовательность $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots; a_n = \frac{1}{3^n}$ ограничена, так как $0 < a_n < 1$ или $|a_n| < 1$;

4) последовательность $-2, 4, -8, 16, \dots; a_n = (-2)^n$ не ограничена, так как для любого числа $M > 0$ можно найти такой номер n , что $|a_n| = |(-2)^n| = 2^n > M$. Достаточно взять $n \geq [\log_2 M] + 1$.

Пример 2.5. Доказать, что

- 1) последовательность (a_n) , $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ограничена сверху;
- 2) последовательность (a_n) , $a_n = n^3 - 6n + 2$ ограничена снизу;
- 3) последовательность (a_n) , $a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$ ограничена.

Решение. 1) Для любого номера n имеем

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 1, \text{ следовательно,}$$

(a_n) ограничена сверху.

2) Для любого номера n имеем $a_n = n^3 - 6n + 2 > n^2 - 6n + 2 = (n-3)^2 - 7 \geq -7$, следовательно, (a_n) ограничена снизу.

3) Для любого номера n имеем

$$|a_n| = \left| \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{n-1}{\sqrt{n^2}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \text{ следовательно, } (a_n)$$

ограничена.

2.3. Предел последовательности

Определение 2.8. Число A называется *пределом* последовательности (a_n) , если для любого положительного числа ε можно подобрать такой номер N члена последовательности, зависящий от ε , что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Если (a_n) имеет своим пределом число A , то говорят, что (a_n) *сходится* (или *стремится*) к A и обозначают это так:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, или $a_n \rightarrow A$. Если последовательность (a_n) не имеет предела, то говорят, что она *расходится*. Используя свойства модуля, неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ можно записать так: $-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$ или $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$.

Интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ называется ε -*окрестностью* числа A .

Тогда можно сформулировать понятие предела последовательности следующим образом:

Определение 2.9. Число A называется *пределом* последовательности (a_n) , если для каждой ε -окрестности числа A найдется номер члена последовательности, начиная с которого все члены последовательности будут находиться в этой окрестности. Иначе говоря, для любой сколь угодно малой ε -окрестности числа A вне ее находится лишь *конечное* число членов последовательности (в частности, вне ее может вообще не быть членов последовательности).

Из определения следует, что последовательность может иметь только один предел (*Теорема о единственности предела*).

Если последовательность (a_n) имеет предел, т.е. сходится, то она *ограничена*. Это *необходимое условие* сходимости последовательности. Обратное утверждение *неверно*: ограниченная последовательность может быть как сходящейся, так и расходящейся. Если числовая последовательность (a_n) неограниченная, то она расходуется, т.е. не имеет конечного предела.

Пример 2.6. Используя определение предела последовательности,

доказать, что 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 1} = \frac{3}{5}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} = 2$.

Решение. 1) Для любого $\varepsilon > 0$ попробуем найти такое натуральное число N , чтобы для всякого натурального $n > N$ выполнялось не-

равенство $\left| a_n - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$. Для этого преобразуем абсолютную величину

$$\text{разности } \left| a_n - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 1} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{5(3n^2 + 1) - 3(5n^2 - 1)}{5(5n^2 - 1)} \right| = \frac{8}{5(5n^2 - 1)}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, чтобы выполнялось неравенство

$\frac{8}{5(5n^2 - 1)} < \varepsilon$. Решая это неравенство относительно n , находим

$n^2 > \frac{8}{25\varepsilon} + \frac{1}{5}$; $n > \frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}$. Положив $N = \left[\frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}} \right]$, мы получа-

ем, что при $n > N$ выполняется $\left| a_n - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$. Следовательно, по опре-

делению $a_n \rightarrow \frac{3}{5}$.

Пусть, например, $\varepsilon = 0,01$. Тогда $N = \left[\frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5 \cdot 0,01}{0,01}} \right] = [5,67] = 5$ и

все члены последовательности, начиная с номера $n = 6$, находятся в интервале $\left(\frac{3}{5} - 0,01; \frac{3}{5} + 0,01 \right)$ (т.е. в ε -окрестности числа A ,

$\varepsilon = 0,01$ и $A = \frac{3}{5}$), а вне этой окрестности находятся только первые 5 членов этой последовательности.

2) Аналогично предыдущему, зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и рас-

смотрим разность $\left| \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} - 2 \right| = \left| \frac{-7n + 4}{n^2 + 3n - 1} \right| = \frac{7n - 4}{n^2 + 3n - 1}$.

Дальнейшее решение можно продолжить так же, как и в 1), т.е. ре-

шить относительно n неравенство $\frac{7n - 4}{n^2 + 3n - 1} < \varepsilon$. Проще, однако,

использовать следующее очевидное замечание. Чтобы доказать ра-

венство $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, мы по произвольному $\varepsilon > 0$ должны указать но-

мер N такой, что неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$ выполняется, как только

$n > N$, но при этом вовсе не обязательно находить *наименьшее* воз-

можное значение этого номера. Мы можем указать *любой* номер N ,

который гарантирует выполнение неравенства $|a_n - A| < \varepsilon$ при

$n > N$. Этот простой и очевидный факт позволяет решить эту задачу

проще. Поскольку $7n - 4 < 7n$; $n^2 + 3n - 1 > n^2$, то

$$\frac{7n - 4}{n^2 + 3n - 1} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}. \text{ Теперь уже легко завершить доказательство.}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство $\frac{7}{n} < \varepsilon$. Отсюда

$$n > \frac{7}{\varepsilon} \text{ и в качестве искомого номера } N \text{ возьмем } N = \left[\frac{7}{\varepsilon} \right]. \text{ Тогда при}$$

$n > N$ выполняется неравенство $\frac{7}{n} < \varepsilon$, а поскольку

$$|a_n - 2| = \frac{7n - 4}{n^2 + 3n - 1} < \frac{7}{n}, \text{ то при } n > N \text{ будет выполняться и неравен-}$$

ство $|a_n - 2| < \varepsilon$. Это по определению означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Пример 2.7. Доказать, что последовательности 1) $a_n = (-1)^n$;

2) $a_n = 3n - 7$ расходятся, т.е. не имеют предела.

Решение. 1) Если n четное число, то $a_n = 1$, если n нечетное число,

то $a_n = -1$. Поэтому в любой окрестности точек 1 и -1 содержится

бесконечно много членов последовательности, следовательно, числа

1 и -1 не могут быть пределами последовательности (исходя из геометрического смысла предела). Из него же следует, что любое число $A \neq -1$ и $A \neq 1$ также не может быть пределом данной последовательности так как в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, фигурирующего в определении, его можно подобрать так, чтобы интервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ не содержал бы точек ± 1 , а тогда в нем вообще не будет членов последовательности, тем более их бесконечного числа.

Итак, последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела, но, очевидно, ограничена: $|a_n| = |(-1)^n| = 1 < M$, где M — любое число, больше 1.

2) Докажем, что a_n не является ограниченной. Пусть M — произвольное положительное число. Решим неравенство $a_n > M$

($3n - 7 > M$) относительно n , получим $n > \frac{M+7}{3}$. Тогда при всех

$n > N = \left[\frac{M+7}{3} \right]$ будет $a_n > M$, т.е. a_n не ограничена сверху. След-

овательно, не выполнено необходимое условие сходимости и последовательность расходится.

2.4. Правила предельного перехода

1) *Свойства, выражаемые равенствами.*

а) Пусть существует предел последовательности (a_n) , равный числу a , и предел последовательности (b_n) , равный числу b . Тогда суще-

ствуют конечные пределы последовательностей $(a_n \pm b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$,

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, $(a_n^{b_n})$ и выполняются равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b \quad (2.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n \neq 0, b \neq 0) \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = a^b \quad (a_n > 0, a > 0) \quad (2.4)$$

б) Если все члены последовательности (a_n) и число a принадлежат области определения непрерывной функции $f(x)$, (определение непрерывной функции будет дано ниже), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \quad (2.5)$$

в) Пусть существует предел последовательности (a_n) , равный a , тогда последовательность (a_{n+k}) также имеет предел, равный a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a, \quad (2.6)$$

здесь k — любое неотрицательное число, в частности, $k = 1$.

2) *Свойства, выражаемые неравенствами.*

а) Если при каждом натуральном n , начиная с некоторого номера N , т.е. при $n \geq N$, имеет место неравенство $a_n \geq b_n$ (или $a_n > b_n$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (2.7)$$

б) Если a больше некоторого числа p , $a > p$, то найдется номер N такой, что для любого $n > N$ будет $a_n > p$; если $a < p$, то найдется номер N такой, что для любого $n > N$ будет $a_n < p$.

Отсюда следует *лемма о сохранении знака*: начиная с некоторого номера N , все члены последовательности (a_n) , сходящиеся к числу $a \neq 0$, имеют тот же знак, что и ее предел, равный a .

в) Пусть дана последовательность (c_n) , причем для всех номеров n , начиная с некоторого, выполнено неравенство $a_n \leq c_n \leq b_n$, тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$, то (c_n) сходится к тому же числу: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ (теорема о "сжатой" последовательности).

2.5. Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б.) последовательности

Определение 2.10. Последовательность (a_n) называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N$ будет $|a_n| < \varepsilon$. Иначе, в любом интервале $(-\varepsilon; \varepsilon)$ находится бесконечно много членов этой последовательности, а вне ее находится лишь *конечное* число членов.

Связь между сходящейся и б.м. последовательностями: для того чтобы число A являлось пределом последовательности (a_n) , необходимо и достаточно, чтобы (a_n) можно было представить в виде суммы A и б.м. последовательности (α_n) :

$$(a_n) = A + (\alpha_n), \text{ где } \alpha_n \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Свойства б.м. последовательностей:

1) Сумма, разность и произведение двух б.м. последовательностей является б.м., т.е. если $(\alpha_n) \rightarrow 0$, $(\beta_n) \rightarrow 0$, то

$$(\alpha_n \pm \beta_n) \rightarrow 0, \quad (\alpha_n \cdot \beta_n) \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

2) Произведение ограниченной последовательности на б.м. является б.м., т.е., если существует такое $M > 0$, что для всех номеров n $|a_n| < M$ и $\alpha_n \rightarrow 0$, то

$$(a_n \alpha_n) \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

В частности, если $c = \text{const}$, то $(c\alpha_n) \rightarrow 0$.

Определение 2.11. Последовательность (a_n) называется расходящейся к плюс бесконечности (или *положительной бесконечно большой*), если для любого числа $A > 0$ найдется номер $N = N(A)$, такой что при всех $n > N$ выполняется неравенство $a_n > A$. Иначе говоря, начиная с номера $N+1$ все члены последовательности, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots , лежат в интервале $(A, +\infty)$, а вне его может находиться лишь *конечное* число (не более N) членов последовательности. Такая последовательность называется также стремящейся к $+\infty$, что записывается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Аналогично, если найдется номер N такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $a_n < B$, где B – любое отрицательное число, то последовательность (a_n) называется расходящейся к

минус бесконечности, или стремящейся к $-\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (члены последовательности a_{N+1}, a_{N+2}, \dots , лежат в интервале $(-\infty, B)$, а вне его — члены a_1, a_2, \dots, a_N).

Определение 2.11.а. Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой* (б.б.), если $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$. Иначе говоря, для любого числа $A > 0$ найдется номер $N = N(A)$ такой, что все члены последовательности с номерами $n > N$ находятся вне отрезка $[-A; A]$, а внутри его лежит лишь *конечное* число членов последовательности. При этом пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Б.б. последовательность является неограниченной, обратное неверно: например, $(a_n): 0, 1, 0, -2, 0, 3, 0, -4, \dots$ неограниченная, но не является б.б.

Свойства б.б. последовательностей.

1) Если последовательность $a_n \rightarrow +\infty$ ($a_n \rightarrow -\infty$) и последовательность (b_n) ограничена снизу (сверху), то

$$(a_n \pm b_n) \rightarrow +\infty \quad ((a_n \pm b_n) \rightarrow -\infty).$$

2) Если $a_n \rightarrow \infty$ и последовательность (b_n) такова, что $0 < \alpha \leq b_n$ для любого номера n , то $(a_n \cdot b_n) \rightarrow \infty$.

3) Если $a_n \rightarrow +\infty$ ($a_n \rightarrow -\infty$) и последовательность (b_n) такова, что для всех $b_n \geq a_n$ ($b_n \leq a_n$), то $(b_n) \rightarrow +\infty$ ($(b_n) \rightarrow -\infty$).

4) Если (a_n) — б.б. и $a_n \neq 0$ для всех n , а (b_n) — ограниченная последовательность, то $\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \rightarrow 0$, в частности если $c = \text{const}$, то

$$\left(\frac{c}{a_n}\right) \rightarrow 0.$$

Связь между б.б. и б.м. последовательностями. Пусть (α_n) — б.м., а (β_n) — б.б. последовательности, все члены которых отличны от нуля, тогда последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ будет б.б., а последовательность $\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$ — б.м.

Пример 2.8. Доказать, исходя из определения, что последовательности 1) $a_n = \frac{1}{n^k}$, $k > 0$, 2) $a_n = \frac{2 \cdot (-1)^n}{5\sqrt[3]{n} + 1}$, 3) $a_n = q^n$, $0 < q < 1$ бесконечно малые.

Решение. 1) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. $|a_n| = \frac{1}{n^k}$, то необходимо решить неравенство $\frac{1}{n^k} < \varepsilon$, откуда $n > \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Следовательно, в качестве номера N можно взять целую часть: $N = \left[\sqrt[k]{1/\varepsilon}\right]$.

2) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Оценим $|a_n|$:

$$|a_n| = \left| \frac{2 \cdot (-1)^n}{5\sqrt[3]{n} + 1} \right| = \frac{2}{5\sqrt[3]{n} + 1} < \frac{2}{5\sqrt[3]{n}} < \frac{2}{2\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Поэтому, $|a_n| < \varepsilon$ как только $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$, т.е. при $n > \frac{1}{\varepsilon^3}$. В качестве N

можно взять $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^3} \right\rceil$. Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Так как

$|a_n| < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, то заведомо $|a_n| < \frac{1}{10}$, если $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{1}{10}$, или $n > 1000$. Можно

убедиться, что все члены последовательности, начиная с номера

$N = 1001$, находятся внутри интервала $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$. Заметим, что

здесь найден не наименьший из номеров N , входящих в определение. Его можно получить, решая неравенство $|a_n| = \frac{2}{5\sqrt[3]{n} + 1} < \frac{1}{10}$. От-

сюда $n > \left(\frac{19}{5}\right)^3 \approx 54,87$. Таким образом, при $\varepsilon = \frac{1}{10}$ можно взять но-

мер значительно меньший 1001, а именно 55.

3) Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано. Решая неравенство $q^n > \varepsilon$: получим:

$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg q}$. Следовательно, в качестве номера N можно взять целую

часть: $N = \left\lfloor \frac{\lg \varepsilon}{\lg q} \right\rfloor$.

Пример 2.9. Доказать по определению, что 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$; 2) по-

следовательность $\left((-1)^n \cdot n\right)$ является бесконечно большой.

Решение. 1) Пусть A – произвольное положительное число, а N – такое натуральное число, что $N > A^2$. Тогда для всех $n > N$ верно неравенство $\sqrt{n} > \sqrt{N} > A$, это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$.

2) Возьмем произвольное число $A > 0$ и положим $N = [A] + 1$. Тогда для любого $n > N$ справедливы соотношения:

$$|a_n| = |(-1)^n \cdot n| = |n| > [A] + 1 > A, \text{ т.е. } |a_n| > A.$$

Следовательно, последовательность (a_n) является бесконечно большой; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

2.6. Условия существования предела последовательности.

2-й замечательный предел

Пусть задана последовательность (a_n) . Как узнать, существует ли у этой последовательности конечный предел? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема Коши. Для того чтобы последовательность (a_n) имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, чтобы неравенство

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ выполнялось для всех членов последовательности с номерами $n > N$, $m > N$.

Пусть для определенности $m > n$, тогда $m = n + p$, где p натуральное. Поэтому теорему Коши можно сформулировать так: для

того, чтобы последовательность (a_n) имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало натуральное число $N = N(\varepsilon)$, такое, что для любого $n > N$ и для любого натурального p выполнялось неравенство $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Пример 2.10. Доказать сходимость последовательности

$$(a_n) = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Оценим модуль разности $|a_{n+p} - a_n|$. Используя неравенство $|\cos n| \leq 1$ и свойства модуля, получим:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)}{3^{n+2}} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \\ &+ \frac{1}{3^{n+2}} + \dots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}, \text{ для любого } p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(использовали формулу для суммы последовательности членов геометрической прогрессии). Пусть ε – произвольное положительное число; поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$, для этого ε существует $N(\varepsilon)$ такое,

что для любого $n > N$ верно неравенство $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Значит, если $n > N$

и p произвольное натуральное число, то $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Усло-

вия теоремы Коши выполнены, последовательность (a_n) сходится.

На практике применение теоремы Коши, как правило, затруднительно. Поэтому желательно иметь более простые *достаточные* условия существования конечного предела последовательности (a_n) . Один из них нам уже известен – это теорема о “зажатой” последовательности.

Другим важным достаточным признаком является *теорема Вейерштрасса*: Если последовательность монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

Пример 2.11. Найти пределы последовательностей

$$1) a_n = \frac{c^n}{n!}, c > 0, 2) a_n = \frac{1}{n^2 + n!}.$$

Решение. 1) Поскольку $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{c^n} = \frac{c \cdot c^n}{c^n} \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{c}{n+1}$,

следовательно, при $n > c-1$ последовательность (a_n) будет убывать; кроме того $a_n > 0$, т.е. (a_n) ограничена снизу. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ существует, поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{c}{n+1}, a = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n+1},$$

$$a = a \cdot 0. \text{ Отсюда: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$$

$$2) \text{ Поскольку } 0 < \frac{1}{n^2 + n!} < \frac{1}{n^2} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \text{ то по теореме о}$$

$$\text{“зажатой” последовательности } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n!} = 0.$$

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Можно показать, что $a_{n+1} > a_n$ и $2 \leq a_n \leq 3$, т.е. эта последовательность возрастает и ограничена, тогда по теореме Вейерштрасса она имеет конечный предел, обозначаемый e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (2.11)$$

e — число иррациональное, $e = 2,71828\dots$

Равенство (2.11) называется *вторым замечательным пределом*.

Можно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Справедливы более общие утверждения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} &= e; & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} &= \frac{1}{e}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} &= e; & \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} &= \frac{1}{e}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где (k_n) и (α_n) соответственно положительные бесконечно большая и бесконечно малая последовательности, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Отметим, что $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$, при $n \rightarrow \infty$, поэтому при нахождении

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возникает неопределенность вида (1^∞) . Именно такие

неопределенности позволяет “раскрыть” 2-й замечательный предел.

2.7. Основные способы нахождения пределов последовательностей.

Нахождение предела последовательности (a_n) основывается на свойствах пределов, приведенных выше. При этом необходимо отметить, что правила предельного перехода (2.1) – (2.5) применимы в случае конечных пределов последовательностей. В противном случае мы приходим к пределам вида $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\alpha_n} = 0$, если $\alpha_n \rightarrow \infty$;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\alpha_n} = \infty$, если $\alpha_n \rightarrow 0$ и необходимости раскрыть, как говорят,

неопределенные выражения: $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (0^0) ,

(∞^0) . При раскрытии неопределенностей используется следующие

важные пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha \geq 0),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad (\alpha > 0, |a| > 1), \quad (2.13)$$

а также различные тождественные преобразования, позволяющие перейти от неопределенных выражений к таким, для которых уже можно применить свойства пределов (2.1) – (2.5) и равенства (2.13).

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть требуется найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, причем $a_n \rightarrow \infty$ и $b_n \rightarrow \infty$. В

этом случае равенство (2.3) неприменимо, получаем неопределенное выражение $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Следует отметить, что ∞ — это символ, а не число,

поэтому выражение $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ необходимо понимать так, что при безграничном возрастании n числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают. Основной прием здесь заключается в том, чтобы выделить в числителе и знаменателе *главные части*. То есть те слагаемые, которые возрастают вместе с n и быстрее остальных слагаемых. Например, пусть $a_n = 3n - 100$. При больших n a_n будет почти равно $3n$, иначе говоря $a_n \rightarrow \infty$ так же, как и само $3n$. Это обозначается так: $a_n = 3n - 100 \sim 3n$.

Для $a_n = 0,1n^3 + 150n^2 - 30n + 100$ при $n \rightarrow \infty$ первое слагаемое также будет определять поведение всей суммы так как n^3 растет быстрее, чем n^2 и n . Поэтому можно записать:

$$0,1n^3 + 150n^2 - 30n + 100 \sim 0,1n^3 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть, например, $a_n \sim p_n n^\alpha$, $b_n \sim q_n n^\beta$, тогда, вынося за скобки в числителе n^α , а в знаменателе n^β , после тождественных преобразований получим предел, в котором уже не будет неопределен-

ных выражений, а значит, можно будет использовать свойства (2.1) – (2.3).

Рассмотрим важный частный случай, когда a_n и b_n являются многочленами по переменной n , т.е.

$a_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n^1 + a_0$, $b_n = b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \dots + b_1 n + b_0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^s} \cdot \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_s + \frac{b_{s-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{s-1}} + \frac{b_0}{n^s}} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_s}, & \text{при } k = s \\ 0, & \text{при } k < s \\ \infty, & \text{при } k > s \end{cases} \quad (2.14)$$

Например,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 117n + 80}{7n^2 + 91n - 300} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{3 - \frac{117}{n} + \frac{80}{n^2}}{7 + \frac{91}{n} - \frac{300}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{117}{n} + \frac{80}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{91}{n} - \frac{300}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{117}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{80}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{91}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{300}{n^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще несколько примеров раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Пример 2.12. Найти пределы.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^4 + 3n^3 + 50 + 7n + \sin^3 n}}{9n - 70} = L_1;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{50 - 31n + n^2 - 2\sqrt[3]{3n^6 - 5n^2 + 70}}{\sqrt[4]{2n^{15} + 3n^8 - n^2 + 70 + 3n^2}} = L_2;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 5n + 10)^2 \cdot (2n - 1)^8}{(10n^3 + 3n + 1)(2n + 1)^4 (3n + 17)^4} = L_3.$$

Решение. Идея решения всех этих задач та же – выделение главной части.

1) $5n^4 + 3n^3 + 50 \sim 5n^4$, $\sqrt[4]{5n^4 + 3n^3 + 50} \sim \sqrt[4]{5n^4} = \sqrt[4]{5}n$; $9n - 70 \sim 9n$, следовательно, числитель и знаменатель возрастают одинаково, как $n = n^1$. Поэтому выносим за скобки в числителе и знаменателе n и упрощаем дробь:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{\sqrt[4]{5n^4 + 3n^3 + 50}}{n} + 7 + \frac{\sin^3 n}{n} \right)}{n \left(9 - \frac{70}{n} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{5n^4 + 3n^3 + 50}{n^4}} + 7 + \frac{\sin^3 n}{n}}{9 - \frac{70}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5 + \frac{3}{n} + \frac{50}{n^4}} + 7 + \frac{\sin^3 n}{n}}{9 - \frac{70}{n}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{3}{n} \rightarrow 0$, $\frac{50}{n^4} \rightarrow 0$, $\frac{70}{n} \rightarrow 0$ и $\sin^3 n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ как произведение бесконечно малой $\frac{1}{n}$ на ограниченную $\sin^3 n$ ($-1 \leq \sin^3 n \leq 1$), то

$$L_1 = \frac{\sqrt[4]{5} + 7}{9}.$$

Решение остальных примеров будет более кратким.

$$2) 50 - 31n + n^2 \sim n^2, 3n^6 - 5n^2 + 70 \sim 3n^6,$$

$$\sqrt[3]{3n^6 - 5n^2 + 70} \sim \sqrt[3]{3n^6} = \sqrt[3]{3}n^2; 2n^{15} + 3n^8 - n^2 + 70 \sim 2n^{15},$$

$$\sqrt[5]{3n^{15} + 3n^8 - n^2 + 70} \sim \sqrt[5]{2n^3}. \text{ Поэтому}$$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{50}{n^2} - \frac{31}{n} + 1 - 2\sqrt[3]{3 - \frac{5}{n^4} + \frac{70}{n^6}} \right)}{n^3 \left(\sqrt[5]{2 + \frac{3}{n^7} - \frac{1}{n^{13}} + \frac{70}{n^{15}} + \frac{3}{n}} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{50}{n^2} - \frac{31}{n} + 1 - 2\sqrt[3]{3 - \frac{5}{n^4} + \frac{70}{n^6}}}{n \left(\sqrt[5]{2 + \frac{3}{n^7} - \frac{1}{n^{13}} + \frac{70}{n^{15}} + \frac{3}{n}} \right)} = 0.$$

3)

$$(3n^2 + 5n + 10)^2 \sim 9n^4; (2n - 1)^8 \sim 2^8 n^8; (10n^3 + 3n + 1) \sim 10n^3,$$

$$(2n + 1)^4 \sim 2^4 n^4, (3n + 17)^4 \sim 3^4 n^4. \text{ Поэтому}$$

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{12} \frac{(3n^2 + 5n + 10)^2}{n^4} \cdot \frac{(2n - 1)^8}{n^7}}{n^{11} \frac{10n^3 + 3n + 1}{n^3} \cdot \frac{(2n - 1)^4}{n^4} \cdot \frac{(3n + 17)^4}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2} \right)^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right)^8}{\left(10 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n} \right)^4 \cdot \left(3 + \frac{17}{n} \right)^4} = \infty.$$

При раскрытии неопределенностей $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ в случае, когда в числителе и в знаменателе содержатся степенные слагаемые, используются свойства степеней и пределы:

$$q^n \rightarrow 0, |q| < 1; q^n \rightarrow \infty, |q| > 1.$$

Пример 2.13. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n+1}}; \quad 2) L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 \cdot 49^{n-1} + 2^{n+2}} - 3 \cdot 7^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 5^n - 4 \cdot 7^n}.$$

Решение. 1) Предварительно упростим дробь, используя свойства

степеней:
$$\frac{2 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 3^n + \frac{3}{2} \cdot 2^n}{\frac{1}{3} \cdot 3^n + 7 \cdot 2 \cdot 2^n}.$$
 Поскольку $3^n > 2^n$, то

числитель и знаменатель возрастает одинаково быстро — как 3^n .

Следовательно, вынесем за скобки в числителе и знаменателе 3^n :

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left[2 \cdot 3^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}{3^n \left[\frac{1}{3} + 7 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}, \text{ поскольку } \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0, \text{ то } L_1 = \frac{2 \cdot 3^2}{\frac{1}{3}} = 54.$$

$$2) 5 \cdot 49^{n-1} + 2^{n+2} = 5 \cdot 7^{2n-2} + 2^{n+2} = \frac{5}{49} \cdot 7^{2n} + 4 \cdot 2^n \sim \frac{5}{49} \cdot 7^{2n},$$

$$\sqrt{5 \cdot 49^{n-1} + 2^{n+2}} \sim \sqrt{\frac{5}{49} \cdot 7^{2n}} = \frac{\sqrt{5}}{7} \cdot 7^n;$$

$$2 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 5^n - 4 \cdot 7^n = 2 \cdot 9 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n - 4 \cdot 7^n \sim -4 \cdot 7^n,$$

поскольку $7^n > 3^n > 2^n$, то

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n \left[\frac{\sqrt{5 \cdot 49^{n-1} + 2^{n+2}}}{7^n} - 3 \cdot 7 \right]}{7^n \left[\frac{2 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 5^n - 4 \cdot 7^n}{7^n} \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{5 \cdot 49^{n-1} + 2^{n+2}}{7^{2n}}} - 21}{2 \cdot 9 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n - 4} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{5}{49} + 4 \cdot \left(\frac{2}{49}\right)^n} - 21}{18 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n - 4} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{7} - 21}{-4} = \frac{147 - \sqrt{5}}{28}.
 \end{aligned}$$

В некоторых случаях необходимо применить формулы, выражающие суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \text{ — для арифметической прогрессии;}$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ — для геометрической прогрессии.}$$

Пример 2.14. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+3}; \quad 2) L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1};$$

$$3) L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} + 3^{n-1}}{1+7+7^2+\dots+7^n}; \quad 4) L_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}.$$

Решение. 1) Используя формулу для S_n (прогрессия арифметическая) при $a_1 = 1$, $a_n = n$, получим:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{n^2 + 3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 3} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

2) Здесь $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$, число членов n . Используя формулу для S_n (прогрессия арифметическая), получим:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{\frac{1 + (2n - 1)}{2}} \cdot n}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} = \frac{1}{2}.$$

3) Здесь $b_1 = 1$, $q = 7$, число членов прогрессии $N = n + 1$. Используя формулу для S_n (прогрессия геометрическая), получим:

$$\begin{aligned} L_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 7^n + \frac{1}{3} \cdot 3^n}{1 \cdot (7^{n+1} - 1)} = 6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 7^n + \frac{1}{3} \cdot 3^n}{7 \cdot 7^n - 1} = \\ &= 6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n \left[7 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} \right)^n \right]}{7^n \left[7 - \frac{1}{7^n} \right]} = 6. \end{aligned}$$

4) Используя формулу для S_n (прогрессия геометрическая), получим:

$$L_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1}}{\frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} - 1 \right]}{\frac{1}{3} - 1}} = \frac{\frac{-1}{-\frac{1}{2}}}{\frac{-1}{-\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3}.$$

Раскрытие неопределенностей вида

$$(\infty - \infty); (0 \cdot \infty); (0 \cdot (\infty - \infty)); \left(\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \right).$$

Обычно при раскрытии этих неопределенностей используются различные тождественные преобразования, позволяющие свести их к уже известной задаче – раскрытию неопределенностей вида

$\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, или получить задачу, в которой нет неопределенностей. Рассмотрим некоторые типичные примеры.

Пример 2.15. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n); \quad 2) L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{2n^2 - n + 5});$$

$$3) L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n).$$

Решение.

Здесь имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$. При решении этих задач используем формулы сокращенного умножения

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2; \quad (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

$$\begin{aligned}
 1) L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{\frac{n^2 + 2n}{n^2}} + 1 \right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{2n^2 - n + 5})(\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n + 5})}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n + 5}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 3n + 1) - (2n^2 - n + 5)}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 4}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{2n^2 - n + 5}} = \\
 &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2n^2 - n + 5}{n^2}} \right)} = \\
 &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) L_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n) \left(\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2 \right)}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \left[\sqrt[3]{\frac{(n^3 + 2n^2)^2}{n^6}} + \sqrt[3]{\frac{n^3 + 2n^2}{n^3}} + 1 \right]} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Пример 2.16. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{n^2 + 2} - n); \quad 2) L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}).$$

Здесь имеем неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$. Используем тот же прием, что и в примере 2.15.

Решение.

$$\begin{aligned}
 1) L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (\sqrt{n^2 + 2} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 2 - n^2)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{\frac{n^2 + 2}{n^2}} + 1 \right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

2)

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}) \left(\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{n^3 + 1} \cdot \sqrt[3]{n^3 - 1} + \sqrt[3]{(n^3 - 1)^2} \right)}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{n^3 + 1} \cdot \sqrt[3]{n^3 - 1} + \sqrt[3]{(n^3 - 1)^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n^3 + 1 - n^3 + 1)}{n^2 \left[\sqrt[3]{\frac{(n^3 + 1)^2}{n^6}} + \sqrt[3]{\frac{n^3 + 1}{n^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^3 - 1}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{(n^3 - 1)^2}{n^6}} \right]} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2.17. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 3n + 1} - n \right);$

2) $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 1} - 2n \right);$ 3) $L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n + 1}}{\sqrt{n + 2}} - \sqrt{n} \right).$

Решение. Чтобы понять, какая здесь неопределенность, выполним действие в скобках.

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n(n^2 + 3n + 1)}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - n}{n^2 + 3n + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = -3.$$

2) Используем сначала формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{n+1} - 2n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{2(n+1)} - 2n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 4n(n+1)}{2(n+1)} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - 3n}{n+1} = -\infty.$$

$$\begin{aligned}
 3) L_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}(\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 2 \right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)} = \frac{-1}{1} = -1.
 \end{aligned}$$

Пример 2.18. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt[3]{3n^2+n} - \sqrt[3]{3n^2-n}}; \quad 2) L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n+2} - 2n}{\sqrt[3]{8n^3+7n+51} - 2n}.$$

Здесь имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \right)$. Используем формулы

сокращенного умножения.

$$\begin{aligned}
 \text{Решение. } 1) L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \cdot (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \times \\
 &\times \frac{\sqrt[3]{(3n^2+n)^2} + \sqrt[3]{3n^2+n} \sqrt[3]{3n^2-n} + \sqrt[3]{(3n^2-n)^2}}{(\sqrt[3]{3n^2+n} - \sqrt[3]{3n^2-n}) (\sqrt[3]{(3n^2+n)^2} + \sqrt[3]{3n^2+n} \sqrt[3]{3n^2-n} + \sqrt[3]{(3n^2-n)^2})} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) - (2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(3n^2+n)^2} + \sqrt[3]{3n^2+n} \sqrt[3]{3n^2-n} + \sqrt[3]{(3n^2-n)^2}}{(3n^2+n) - (3n^2-n)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(3n^2+n)^2} + \sqrt[3]{3n^2+n} \sqrt[3]{3n^2-n} + \sqrt[3]{(3n^2-n)^2}}{2n} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n^{4/3} \left[\sqrt[3]{\frac{(3n^2+n)^2}{n^4}} + \sqrt[3]{\frac{3n^2+n}{n^2}} \sqrt[3]{\frac{3n^2-n}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{(3n^2-n)^2}{n^4}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{4/3} \left[\sqrt[3]{\frac{(3n^2+n)^2}{n^4}} + \sqrt[3]{\frac{3n^2+n}{n^2}} \sqrt[3]{\frac{3n^2-n}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{(3n^2-n)^2}{n^4}} \right]}{n^{3/2} \left[\sqrt{\frac{2n+1}{n}} + \sqrt{\frac{2n-1}{n}} \right]} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{3+\frac{1}{n}} \sqrt[3]{3-\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}}{n^{1/6} \left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2-\frac{1}{n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[3]{9}}{2\sqrt{2}n^{1/6}} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) L_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2+n+2}-2n) \cdot (\sqrt{4n^2+n+2}+2n)}{\sqrt{4n^2+n+2}+2n} \times \\
&\times \frac{\sqrt[3]{(8n^3+7n+51)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^3+7n+51} + 4n^2}{\left(\sqrt[3]{8n^3+7n+51}-2n \right) \cdot \left(\sqrt[3]{(8n^3+7n+51)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^3+7n+51} + 4n^2 \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n+2-4n^2}{8n^3+7n+51-8n^3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(8n^3+7n+51)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^3+7n+51} + 4n^2}{\sqrt{4n^2+n+2}+2n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{7n+51} \cdot \frac{\sqrt[3]{(8n^3+7n+51)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^3+7n+51} + 4n^2}{\sqrt{4n^2+n+2}+2n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n \left(7 + \frac{51}{n} \right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\sqrt[3]{\frac{(8n^3+7n+51)^2}{n^3}} + 2\sqrt[3]{\frac{8n^3+7n+51}{n^3}} + 4 \right)}{n \left(\sqrt{\frac{4n^2+n+2}{n^2}} + 2 \right)} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt[3]{8 + \frac{7}{n^2} + \frac{51}{n^3}} + 2 \sqrt[3]{8 + \frac{7}{n^2} + \frac{51}{n^3} + 4} \right)}{\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + 2} = +\infty.$$

Раскрытие неопределенностей (1^∞)

В этом случае используется 2-й замечательный предел, формулы (2.10) – (2.12) и свойство (2.4).

Пример 2.19. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-6n}{1-6n} \right)^{7n+2}; \quad 2) L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+n+1} \right)^{3n-1};$$

$$3) L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}} \right)^{3\sqrt{n}}; \quad 4) L_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n+1} \right)^n;$$

$$5) L_5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-3n}{5-3n} \right)^{\sqrt{2n^2+n+3}}$$

Во всех этих задачах – неопределенность (1^∞). Для использования 2-го замечательного предела предварительно выделим целую часть дроби.

Решение. 1) $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{4-6n}{1-6n} - 1 \right) \right]^{7n+2} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{3}{1-6n} \right]^{7n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{1-6n} \right)^{\frac{1-6n}{3}} \right]^{\frac{3}{1-6n} (7n+2)} = e^t,$$

$$\text{где } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (7n+2)}{1-6n} = \frac{3 \cdot 7}{-6} = -\frac{7}{2}; L_1 = e^{-7/2}.$$

$$\begin{aligned} 2) L_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + n + 1} - 1 \right) \right]^{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n+1}{n^2 + n + 1} \right]^{3n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{n+1}{n^2 + n + 1} \right)^{\frac{n^2 + n + 1}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n^2 + n + 1} (3n-1)} = e^l, \end{aligned}$$

$$\text{где } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (3n-1)}{n^2 + n + 1} = 3; L_2 = e^3.$$

$$\begin{aligned} 3) L_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2 + \sqrt{n+1}} - 1 \right) \right]^{3\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-2}{2 + \sqrt{n+1}} \right]^{3\sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{2 + \sqrt{n+1}} \right)^{\frac{2 + \sqrt{n+1}}{-2}} \right]^{3\sqrt{n} \left(\frac{-2}{2 + \sqrt{n+1}} \right)} = e^l, \end{aligned}$$

$$\text{где } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 3\sqrt{n}}{2 + \sqrt{n+1}} = -6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2 + \sqrt{n+1}} = -6; L_3 = e^{-6}.$$

$$\begin{aligned} 4) L_4 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{2^n + 3}{2^n + 1} - 1 \right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2}{2^n + 1} \right]^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2^n + 1} \right)^{\frac{2^n + 1}{2}} \right]^{\frac{2}{2^n + 1} n} = e^l, \text{ где } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2}{2^n + 1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2^n}{n} + \frac{1}{n}} = 0; \end{aligned}$$

$$L_4 = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned}
 5) L_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{4-3n}{5-3n} - 1 \right) \right]^{\sqrt{2n^2+n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-1}{5-3n} \right]^{\sqrt{2n^2+n+3}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3n-5} \right)^{\frac{3n-5}{1}} \right]^{\sqrt{2n^2+n+3} \left(\frac{1}{3n-5} \right)} = e^l, \text{ где } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{3n-5} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{\frac{2n^2+n+3}{n^2}}}{n \left(3 - \frac{5}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{3}; L_3 = e^{\frac{\sqrt{2}}{3}}.
 \end{aligned}$$

Разные примеры на нахождение пределов числовых последовательностей.

Пример 2.20. Найти $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{2n - 4n^4}{8n^4 - 15n^3}$.

Решение. Найдем сначала предел аргумента арккосинуса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 4n^4}{8n^4 - 15n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(\frac{2}{n^3} - 4 \right)}{n^4 \left(8 - \frac{15}{n} \right)} = -\frac{1}{2}. \text{ Теперь используем свойство}$$

$$(2.5): L = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 2.21. Найти $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sin 2n}{4 + \cos 2n} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{n+1} + 3}{n+1}$.

Решение. Здесь используем теорему: произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая.

Последовательность $\frac{3 + \sin 2n}{4 + \cos 2n}$ ограничена: т.к. $2 \leq 3 + \sin 2n \leq 4$,

3: то $\frac{2}{5} \leq \frac{3 + \sin 2n}{4 + \cos 2n} \leq \frac{4}{3}$. Последовательность

\arcsin бесконечно малая, т.к. аргумент арксинуса беско-

нечно малый: $\frac{\sqrt{n+1}+3}{n+1} \rightarrow 0$, следовательно, по свойству (2.5)

$\arcsin \frac{\sqrt{n+1}+3}{n+1} \rightarrow 0$. Поэтому $L = 0$.

Пример 2.22. Найти $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n})$.

Решение. Преобразуем разность косинусов:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-2 \sin \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \right) \right];$$

теперь преобразуем аргумент 2-го синуса:

$$L = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right) \cdot \sin \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

$$= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right). \text{ Теперь очевидно, что}$$

предел равен нулю: $\left| \sin \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right) \right| \leq 1$; $\frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \rightarrow 0$, по-

этому $\sin \left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) \rightarrow 0$, и заданная последовательность

представляет собой произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую. Поэтому $L = 0$.

Пример 2.23. Найти $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n}$.

Решение. Здесь используются формулы (2.13): $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{n}) = 1 \cdot 1 = 1$.

Пример 2.24. Найти $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n \cdot 2^n}$.

Решение. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n \left(1 + n \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{1 + \frac{n}{(3/2)^n}}$.

Поскольку $\frac{n}{(3/2)^n} \rightarrow 0$, то $L = 3$.

2.8. Предел функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности

Ω точки x_0 , кроме, может быть, самой точки x_0 .

Определение I (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \Omega$, $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение II (Гейне). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если для любой последовательности (x_n) значений

аргумента $(x_n \in \Omega, x_n \neq x_0)$, сходящейся к точке x_0 , соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))$ сходится к числу A . Оба определения эквивалентны, т.е. если функция $f(x)$ имеет предел A в смысле определения I, то она имеет тот же предел A в смысле определения II, и наоборот. В определении I число δ , вообще говоря, зависит от числа ε . В определениях предела функции в точке x_0 сама точка x_0 из рассмотрения исключается. Следовательно, значение функции в точке x_0 не влияет на значение предела. При этом функция $f(x)$ может быть вообще не определена в точке x_0 . Отсюда следует, что две функции, равные для всех x из окрестности точки x_0 за исключением самой точки x_0 , имеют при $x \rightarrow x_0$ один и тот же предел A или не имеют предела.

Пример 2.25. Доказать, используя определение I, что

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9; \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Решение. 1) Надо показать, что, выбрав произвольно $\varepsilon > 0$, можно по нему подобрать $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для каждого x , удовлетворяющего условию $|x - 3| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|x^2 - 9| < \varepsilon. \text{ Пусть } |x - 3| < \delta, \text{ которое пока не определено. Тогда}$$

$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| = |(x - 3)((x - 3) + 6)| \leq |x - 3|(|x - 3| + 6) < \delta^2 + 6\delta.$$

И если положить $\delta^2 + 6\delta = \varepsilon$, то из неравенства $|x - 3| < \delta$ будет следовать неравенство $|x^2 - 9| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$. Оста-

лось решить уравнение $\delta^2 + 6\delta - \varepsilon = 0$ и отобрать его положительный корень: $\delta = 3 + \sqrt{9 + \varepsilon}$.

2) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему подберем $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для каждого x , удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Используя неравенство $|\sin x| \leq |x|$, справедливое для всех x , получим:

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \cdot \sin \frac{x-x_0}{2} \right| = 2 \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|. \end{aligned}$$

Если взять, например, $\delta = \varepsilon$, то для каждого x , удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. В частности, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Пример 2.26. Доказать, используя определение II, что

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$; 2) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение. 1) Будем рассматривать данную функцию в некоторой окрестности точки $x = 4$, например, на интервале $(3; 5)$. Возьмем какую либо последовательность $x_n \in (3; 5)$ такую, что $x_n \neq 4$ и

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$. Тогда на основании теорем о пределах последовательностей

$$\text{имеем } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 4}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} =$$

$$= \frac{4 + 4}{4} = 2. \text{ В силу произвольности выбранной последовательности}$$

x_n согласно определению II, получаем, что $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$.

2) Возьмем две последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $\bar{x}_n = \frac{2}{4n+1}$, сходящиеся

к точке $x = 0$. Рассмотрим соответствующие последовательности

$(f(x_n))$ и $(f(\bar{x}_n))$ значений функции. Так как $f(x_n) = \sin \pi n \rightarrow 0$, а

$$f(\bar{x}_n) = \sin \left(\frac{\pi(4n+1)}{2} \right) \rightarrow 1, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \text{ не существует.}$$

2.9. Теоремы о пределах

1) *Единственность предела.* Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, то этот предел единственный.

2) *Ограниченность функции, имеющей предел.*

Определение 2.12. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в δ -окрестности точки x_0 , если существует число $M > 0$ такое, что для всех x из δ -окрестности точки x_0 , т.е. для всех x удовлетворяющих неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то найдется δ -окрестность точки x_0 в

которой функция $f(x)$ ограничена.

3) Если $f(x) = c = \text{const}$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$. Предел постоянной равен самой постоянной.

4) *Арифметические операции над пределами функций.*

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, то:

а) Существует предел функции $f(x) \pm g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и он равен $A \pm B$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B; \quad (2.15)$$

б) Существует предел функции $f(x) \cdot g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и он равен $A \cdot B$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B; \quad (2.16)$$

в частности, если c — константа, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A, \quad (2.17)$$

иначе говоря, постоянный множитель можно выносить за знак предела;

в) При $B \neq 0$ существует предел при $x \rightarrow x_0$ функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ и он равен $\frac{A}{B}$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}. \quad (2.18)$$

5) *Переход к пределу в неравенствах*: если $f(x) \leq g(x)$ (или $f(x) < g(x)$) для всех x из некоторой окрестности точки x_0 , кроме, может быть, самой точки x_0 , и каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет в точке x_0 предел, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (2.19)$$

6) *Предел промежуточной функции*.

Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0 , кроме, может быть, самой точки x_0 , и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют в точке x_0 предел, равный A , то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, также равный A .

7) *Предел сложной функции*. Пусть $y = f(u)$, где $u = g(x)$ и существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ и $\lim_{u \rightarrow A} f(u)$; тогда в точке x_0 существует предел сложной функции $f(g(x))$, причем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow A} f(u). \quad (2.20)$$

Эта теорема обосновывает метод замены переменной при нахождении пределов функции.

8) Для всех основных элементарных функций $f(x)$ в любой точке их области определения имеет место равенство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.21)$$

2.10. Предел функции в бесконечности

Определение 2.14. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; +\infty)$, т.е. для всех $x \geq a$, a – некоторое число. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$* , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для каждого x , удовлетворяющего условию $x > M$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$; обозначение: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Определение 2.15. Аналогично, если $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty; a]$, т.е. для всех $x \leq a$, то число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$* , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех x таких, что $x < -M$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$; обозначение: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Определение 2.16. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, за исключением, может быть, конечного отрезка $[a; b]$, т.е. для всех $x < a$ или $x > b$. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$* , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$; обозначение: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Теоремы о пределах при $x \rightarrow x_0$ остаются справедливыми также при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$.

Пример 2.27. Доказать, что 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, если $0 < a < 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $n > 0$.

Решение. 1) Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ выбрано. Решаем неравенство $|a^x - 0| < \varepsilon$: $a^x < \varepsilon \Leftrightarrow x \lg a < \lg \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{\lg \varepsilon}{\lg a}$. Так как все преобразования равносильны, то мы показали: для любого $x > M$ выполняется неравенство $a^x < \varepsilon$, где $M = \frac{\lg \varepsilon}{\lg a}$, если $\varepsilon < 1$, и $M > 0$ любое, если $\varepsilon > 1$. Следовательно, согласно определению, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ при $0 < a < 1$.

2) Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ выбрано. Решая неравенство

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon: \frac{1}{|x|^n} < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}, \text{ получаем, что как только}$$

$$|x| > M = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}, \text{ то } \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ а это и означает, согласно определению,}$$

$$\text{что } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

2.11. Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б.) функции.

Определение 2.17. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Здесь a может быть либо конечным числом x_0 , либо $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

Определение 2.18. Если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$, или говорят, что $f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \rightarrow x_0$, что записывается так:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. Заменяя неравенство $|f(x)| > M$ на неравенство $f(x) > M$ или на неравенство $f(x) < -M$ получим определения положительной б.б. и отрицательной б.б. функций; обозначения: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Свойства б.м. и б.б. функций.

1) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м. функции при $x \rightarrow x_0$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ и произведение $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ также есть б.м. функция при $x \rightarrow x_0$.

2) Если функция $\alpha(x)$ является б.м. при $x \rightarrow x_0$, а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , то произведение $\alpha(x) \cdot f(x)$

есть б.м. функция при $x \rightarrow x_0$. В частности произведение $\alpha(x)$ на постоянную c также б.м..

3) Если $\alpha(x)$ – б.м. при $x \rightarrow x_0$, а функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то функции $\alpha(x) \cdot f(x)$ – б.м. при $x \rightarrow x_0$.

4) *Связь между функцией, имеющей предел, с ее пределом и б.м. функцией.*

Для того чтобы функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad (2.22)$$

где $\alpha(x)$ – б.м. функция при $x \rightarrow x_0$.

5) Функция $f(x)$, определенная и не равная нулю в некоторой окрестности точки x_0 кроме, может быть, самой точки x_0 является б.м. при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{f(x)}$ является б.б. при $x \rightarrow x_0$ (связь между б.м. и б.б.).

Сумма (разность) и частное б.б. не обязательно являются б.б. функциями; частное двух б.м. функций не обязательно является б.м.. В этих случаях теоремы о пределе суммы, разности и частного неприменимы; принято говорить, что имеют место неопределенности

вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$; $\left(\frac{0}{0}\right)$. Аналогично произведение б.м. на б.б. является неопределенностью вида $(0 \cdot \infty)$. Нахождение пределов в таких случаях называется “раскрытием неопределенностей”.

2.12. Техника нахождения пределов

Нахождение пределов функции основывается на применении свойств пределов (2.15) – (2.19) и различных способов раскрытия неопределенностей. Другие способы нахождения пределов функции будут рассмотрены ниже.

Пример 2.28. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3};$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для ее “раскрытия”

выделяем в числителе и знаменателе те множители, которые стремятся к нулю, после чего используем свойства пределов.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+3/2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2 \cdot (x+3/2)} = \frac{1-1}{2 \cdot 1+3} = 0$$

$$\begin{aligned} 2) L_2 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{x^3 - 2x - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (x^2 - 1)}{x(x^2 - 1) - 2(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1) - 2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x^2 - x - 2)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2.29. Найти пределы

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1};$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x+7}-4}{\sqrt{x}-3};$$

$$3) L_3 = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2};$$

$$4) L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+2x^2-3x^3}-2}{x^2+5x}.$$

Решение. Здесь для раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ используем

формулы сокращенного умножения.

$$\begin{aligned} 1) L_1 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1) \cdot (\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2)-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x-2}+1) = \sqrt{3-2}+1 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) L_2 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x+7}-4) \cdot (\sqrt{x+7}+4)}{\sqrt{x+7}+4} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x+7-16}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+7}+4} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+7}+4} = \frac{3+3}{4+4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) L_3 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)}{\sqrt{9+2x}+5} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{9+2x-25}{\sqrt{9+2x}+5} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{9+2x}+5} = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \frac{4+4+4}{5+5} = \frac{12}{5}.$$

4)

$$\begin{aligned} L_4 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{8+2x^2-3x^3} - 2 \right) \left(\sqrt[3]{(8+2x^2-3x^3)^2} + 2\sqrt[3]{8+2x^2-3x^3} + 4 \right)}{(x^2+5x) \left(\sqrt[3]{(8+2x^2-3x^3)^2} + 2\sqrt[3]{8+2x^2-3x^3} + 4 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(2-3x)}{x(x+5) \left(\sqrt[3]{(8+2x^2-3x^3)^2} + 2\sqrt[3]{8+2x^2-3x^3} + 4 \right)} = \\ &= \frac{0}{5(4+4+4)} = 0. \end{aligned}$$

Более изящный способ нахождения этого предела см. в примере 2.39.

Пример 2.30. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{2x^3 + 16x^2 - x - 8};$$

$$3) L_3 = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{6\cos^2 x + \cos x - 2}{14\cos^2 x - 5\cos x - 1};$$

$$4) L_4 = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x - 1}{2\ln^2 x - \ln x - 1}.$$

Решение. В этих задачах для раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0} \right)$

применяем замену переменной.

1) Пусть $\sqrt[4]{x} = z$. Тогда $\sqrt{x} = z^2$ и при $x \rightarrow 16$ $z \rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$. Полу-

$$\text{чим: } L_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{z-2}{z^2-4} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z-2}{(z-2)(z+2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

2) Пусть $\sqrt[3]{x} = t$. Тогда $x = t^3$, $t \rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$ при $x \rightarrow -8$. Тогда

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t+2}{2t^9 + 16t^6 - t^3 - 8} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t+2}{2t^6(t^3+8) - (t^3+8)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t+2}{(t^3+8)(2t^6-1)} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t+2}{(t+2)(t^2-2t+4)(2t^6-1)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{1}{(t^2-2t+4)(2t^6-1)} = \frac{1}{12 \cdot 127} = \frac{1}{1524}.
 \end{aligned}$$

3) Пусть $\cos x = z$, тогда $z \rightarrow \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow \pi/3$.

$$L_3 = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{2}{3}\right)}{14\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{7}\right)} = \frac{6}{14} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{7}} = \frac{7}{9}.$$

4) Пусть $\ln x = z$, тогда $z \rightarrow \ln e = 1$ при $x \rightarrow e$.

$$L_4 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{2z^2 - z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(2z+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{2z+1} = \frac{2}{3}.$$

Нахождение пределов функции при $x \rightarrow \infty$ во многом аналогично нахождению пределов последовательностей.

Пример 2.31. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right); \quad 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x);$$

$$3) L_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 14} + x}{\sqrt{x^2 - 2} + x} \right).$$

Решение. Во всех трех задачах имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(3x+2) - x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4) \cdot (3x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2-4) \cdot (3x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{4}{x}\right)}{x^3 \left(\frac{3x^2-4}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{3x+2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left(3 - \frac{4}{x^2}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{9}.$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)}{(\sqrt{9x^2+1}+3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = 0.$$

3) При нахождении $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ удобно ввести новую переменную

$t = -x$; тогда $x = -t$, $t \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. В данном случае

$$L_3 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2+14}-t}{\sqrt{t^2-2}-t} = \left(\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t^2+14}-t)(\sqrt{t^2+14}+t)}{\sqrt{t^2+14}+t} \cdot \frac{\sqrt{t^2-2}+t}{(\sqrt{t^2-2}-t)(\sqrt{t^2-2}+t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{14}{-2} \cdot \frac{\sqrt{t^2-2}+t}{\sqrt{t^2+14}+t} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -7 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \left(\sqrt{\frac{t^2-2}{t^2}} + 1 \right)}{t \left(\sqrt{\frac{t^2+14}{t^2}} + 1 \right)} = -7 \cdot \frac{1+1}{1+1} = -7.$$

Во многих случаях при раскрытии неопределенностей вида

$\left(\frac{0}{0}\right)$ используется 1-й замечательный предел, т.е. равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

На практике используется более общая форма записи 1-го

замечательного предела: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ или

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\sin f(x)} = 1, \text{ где } f(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a.$$

Пример 2.32. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 3x}; \quad 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 9x}{\operatorname{tg}^2 7x}; \quad 3) L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 9x}{\operatorname{tg} 8x - \sin 7x};$$

$$4) L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 11x}{1 - \sqrt{\cos 7x}}.$$

Решение. Во всех этих задачах преобразуем функцию таким образом, чтобы можно было применить 1-й замечательный предел, при этом учитывается, что $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$.

1) Используем формулу $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin 3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\frac{x}{2} \cdot \sin 3x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x \cdot 3x} = 2 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

2) Здесь используем формулу для разности косинусов

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 6x \sin 3x}{\operatorname{tg}^2 7x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 7x} \cdot \frac{\sin 3x}{\sin 7x} \cdot \cos^2 7x = 2 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{36}{49}.$$

3) Здесь для использования 1-го замечательного предела разделим числитель и знаменатель дроби на x :

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\sin 9x}{x}}{\frac{\operatorname{tg} 8x}{x} - \frac{\sin 7x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\sin 9x}{x}}{\frac{\sin 8x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 8x} - \frac{\sin 7x}{x}} = \frac{3+9}{8 \cdot 1 - 7} = 12.$$

4) При решении задачи применим сначала *стандартный прием*: умножение и деление на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} L_4 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 11x \cdot (1 + \sqrt{\cos 7x})}{(1 - \sqrt{\cos 7x})(1 + \sqrt{\cos 7x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 11x \cdot (1 + \sqrt{\cos 7x})}{1 - \cos 7x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 11x \cdot (1 + \sqrt{\cos 7x})}{2 \sin^2 \frac{7x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin \frac{7x}{2}} \cdot \frac{\sin 11x}{\sin \frac{7x}{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos 7x}}{\cos 11x} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{1+1}{1} = \frac{132}{49}. \end{aligned}$$

В некоторых случаях для использования 1-го замечательно-го предела необходима замена переменной.

Пример 2.33. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi^2}$;

2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x}$; 3) $L_3 = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, где m, n – целые числа;

$$4) L_4 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Решение. 1) Сделаем замену $x - \pi = y$, тогда $x = \pi + y$, и если

$$x \rightarrow \pi, \text{ то } y \rightarrow 0. \text{ Тогда } L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi + 2y)}{(\pi + y)^2 - \pi^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{y^2 + 2\pi y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{2y \left(\frac{y}{2} + \pi \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{2y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{y}{2} + \pi} = \frac{1}{\pi}.$$

2) Сделаем замену $1 - x = z$. Тогда $x = 1 - z$ и $z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$, сле-

$$\text{довательно, } L_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} z \right)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

3) Положим $x = \pi + t$, $t = x - \pi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pi$. Тогда

$$L_3 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(m\pi + mt)}{\sin(n\pi + nt)}. \text{ Используя формулы приведения, получим}$$

$$L_3 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin(mt)}{(-1)^n \sin(nt)} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

$$4) \text{ Положим } x - \frac{\pi}{2} = t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + t.$$

Тогда используя формулы сложения и приведения, получим:

$$\begin{aligned}
 L_4 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{-\sin t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

При нахождении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = C$ следует

иметь в виду, что:

1) Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$, то $C = A^B$.

2) Если $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \neq 1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \pm\infty$, то предел C находится непосредственно.

3) Если $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$, то имеем неопределенность вида (1^∞) . Используем 2-й замечательный предел: представим $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) - 1] \psi(x)} \quad (2.23)$$

На практике эту формулу лучше не запоминать, а каждый раз проделывать необходимые преобразования.

Пример 2.34. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^{2-x^2}$;

2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{3x-1} \right)^{x^2}$; 3) $L_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$; 4) $L_4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x}{x^3+1} \right)^{\frac{2x}{3x+1}}$.

Решение. 1) $\frac{\sin 3x}{x} \rightarrow 3$, $2-x^2 \rightarrow 2$ при $x \rightarrow 0$; $L_1 = 3^2 = 9$.

2) $\frac{x+2}{3x-1} \rightarrow \frac{1}{3}$, $x^2 \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$, следовательно, на основании свойств показательной функции, $L_2 = \left(\frac{1}{3} \right)^{+\infty} = 0$.

3) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2}$, $x+1 \rightarrow 2$ при $x \rightarrow 1$;

$$L_3 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

4) $\frac{x^2+3x}{x^3+1} \rightarrow 0$, $\frac{2x}{3x+1} \rightarrow \frac{2}{3}$ при $x \rightarrow \infty$; $L_4 = 0^{2/3} = 0$.

Пример 2.35. Найти пределы.

1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$; 2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

3) $L_3 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$, где $a \neq k\pi$, k – целое число;

4) $L_4 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; 5) $L_5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^x$.

Решение. Во всех этих задачах необходимо раскрывать неопределенность вида (1^∞) . Используем преобразование (2.23).

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1 \right) \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{-2}} \right]^{\frac{-2x}{x+1}} = e^l,$$

$$\text{где } l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1} = -2, \quad L_1 = e^{-2}.$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + (\cos x - 1) \right]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right]^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \left(-2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right)^{\frac{1}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^l,$$

$$\text{где } l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{4}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = -2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$L_2 = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3) Пусть $x - a = z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, $x = z + a$. Тогда

$$L_3 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(z+a)}{\sin a} \right)^{\frac{1}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[1 + \left(\frac{\sin(z+a)}{\sin a} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{z}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\sin(z+a) - \sin a}{\sin a} \right]^{\frac{1}{z}} = \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \left(\frac{z}{2} + a \right)}{\sin a} \right)^{\frac{\sin a}{2 \sin \frac{z}{2} \cos \left(\frac{z}{2} + a \right)}} \right]^{\frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \left(\frac{z}{2} + a \right)}{z \sin a}} = e^l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } l &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \left(\frac{z}{2} + a \right)}{z \sin a} = \frac{2}{\sin a} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{z}{2}}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \cos \left(\frac{z}{2} + a \right) = \\
&= \frac{2}{\sin a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos a = \operatorname{ctg} a, \quad L_3 = e^{\operatorname{ctg} a}.
\end{aligned}$$

4) Пусть $x - \frac{\pi}{4} = t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, $x = t + \frac{\pi}{4}$. Тогда, используя формулы приведения и разности $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$, получим:

$$\begin{aligned}
L_4 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + 2t \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + \left(\operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-\operatorname{ctg} 2t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\sin t}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \right]^{-\operatorname{ctg} 2t} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2} \sin t}{\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \right)^{\frac{(-\cos 2t) \sqrt{2} \sin t}{\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}} \right] = e^l;$$

$$\begin{aligned} \text{где } l &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-\cos 2t) \sqrt{2} \sin t}{\sin 2t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = -\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos 2t}{\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cdot \sin t \cos t} = \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2} = -1, \quad L_4 = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

5) Сделаем замену $x = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} L_5 &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos az)^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos az - 1)]^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{az}{2} \right) \right]^{\frac{1}{z}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \left(-2 \sin^2 \frac{az}{2} \right) \right)^{\frac{1}{-2 \sin^2 \frac{az}{2}}} \right]^{\frac{-2 \sin^2 \frac{az}{2}}{z}} = e^l, \end{aligned}$$

$$\text{где } l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2 \sin \frac{az}{2}}{z} \right) \cdot \sin \frac{az}{2} = 0, \quad L_5 = e^0 = 1.$$

При раскрытии неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$ используются различные тождественные преобразования или замена переменной, чтобы от неопределенности $(0 \cdot \infty)$ перейти к неопределенностям $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ или $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пример 2.36. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 6x; \quad 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x}.$$

Решение. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 6x}{\sin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 6x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 6x = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$

2) Сделаем замену $x = \frac{1}{z}, z = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Тогда $L_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 3z}{z} = 3.$

2.13. Сравнение бесконечно малых.

Применение к нахождению пределов.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow a$. Если существует конечный отличный от нуля предел их отношения $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка. Если $c = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными; обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Например, из 1-го замечательного предела следует, что при $x \rightarrow 0$ $\sin x \sim x$.

Если $c = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$, что записывается так:

$\alpha(x) = o(\beta(x))$, а $\beta(x)$ — бесконечно малой низшего порядка по отношению к $\alpha(x)$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = c$, где $0 < |c| < +\infty$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой n -го порядка по отношению к $\beta(x)$.

Пример 2.37. Сравнить с бесконечно малой $\varphi(x) = x$ следующие

б.м. при $x \rightarrow 0$ функции: 1) $f_1(x) = \operatorname{tg} x^2$; 2) $f_2(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$;

3) $f_3(x) = \sqrt{9+x} - 3$; 4) $f_4(x) = \cos x - \cos 2x$.

Решение. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, следовательно,

но, $\operatorname{tg} x^2$ является б.м. высшего порядка по сравнению с x .

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = \infty$, значит, $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ есть б.м.

низшего порядка по сравнению с x .

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x} - 3)(\sqrt{9+x} + 3)}{x(\sqrt{9+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{9+x} + 3} = \frac{1}{6}$,

следовательно, б.м. $\sqrt{9+x} - 3$ и x одного порядка малости.

4) $f_4(x) = \cos x - \cos 2x = 2 \sin \frac{3}{2}x \cdot \sin \frac{x}{2}$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3}{2}x}{x} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0$. Следовательно, б.м. $\cos x - \cos 2x$ высшего порядка по сравнению с x .

Имеют место следующие утверждения:

1) Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при

$x \rightarrow a$ и если $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \delta(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$.

Это равенство называется принципом замены эквивалентных б.м..

2) Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, $0 < |k| < \infty$, то $f(x) \cdot \alpha(x) \sim k\alpha(x)$.

3) Если $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) Для того чтобы две б.м. были эквивалентными необходимо и достаточно, чтобы их разность была б.м. более высокого порядка по сравнению с каждой из них.

5) Сумма двух б.м. разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка (так как переход от б.м. к ей эквивалентной равносильно отбрасыванию б.м. высшего порядка).

Таблица эквивалентных б.м. при $\alpha \rightarrow 0$:

$\sin \alpha \sim \alpha$	$\arcsin \alpha \sim \alpha$	$a^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln a$
$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$	$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$	$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$
$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha$	$\log_a(1 + \alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$

$$(1 + \alpha)^m - 1 \sim m\alpha, m \in R$$

Пример 2.38. Заменить каждую из следующих б.м. ей эквивалентной при $\alpha \rightarrow 0$. 1) $3\sin \alpha - 5\alpha^3$; 2) $(1 - \cos \alpha)^2 + 16\alpha^3 + 5\alpha^4 + 6\alpha^5$.

Решение. 1) $3\sin \alpha$ имеет порядок малости 1 относительно α , (т.к. $\sin \alpha \sim \alpha$), $-5\alpha^3$ — порядок малости 3; значит,
 $3\sin \alpha + (-5\alpha^3) \sim 3\sin \alpha \sim 3\alpha$.

$$2) (1 - \cos \alpha)^2 + 16\alpha^3 + 5\alpha^4 + 6\alpha^5 = 4\sin^4 \frac{\alpha}{2} + 16\alpha^3 + 5\alpha^4 + 6\alpha^5.$$

Низший порядок имеет слагаемое $16\alpha^3$, поэтому

$$(1 - \cos \alpha)^2 + 16\alpha^3 + 5\alpha^4 + 6\alpha^5 \sim 16\alpha^3.$$

Нахождение пределов функций во многих случаях существенно упрощается, если использовать свойства эквивалентных б.м. и таблицу эквивалентных б.м..

Пример 2.39. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{7}{4}x}{e^{-2x} - 1}$; 2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$;

$$3) L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \quad \alpha \neq \beta;$$

$$4) L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x + \arctg x^2}{3x}; \quad 5) L_5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right].$$

$$6) L_6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 2x^2 - 3x^3} - 2}{x^2 + 5x}$$

Решение. 1) Поскольку $\arctg \frac{7}{4}x \sim \frac{7}{4}x$, $e^{-2x} - 1 \sim -2x$, то

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{4}x}{-2x} = -\frac{7}{8}.$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \left[1 + \left(\frac{x}{e} - 1 \right) \right]}{x - e}.$$

Так как при $x \rightarrow e$ $\alpha = \frac{x}{e} - 1 \rightarrow 0$, то, используя формулу

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha, \text{ получим: } L_2 = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e}{x - e} = \frac{1}{e}.$$

3) Числитель и знаменатель сначала преобразуем, а затем заменим

$$\begin{aligned} \text{эквивалентными б.м.. } L_3 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} (e^{(\alpha - \beta)x} - 1)}{2 \cos \frac{(\alpha + \beta)x}{2} \cdot \sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} (\alpha - \beta)x}{2 \frac{(\alpha - \beta)x}{2} \cdot \cos \frac{(\alpha + \beta)x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x}}{\cos \frac{(\alpha + \beta)x}{2}} = 1. \end{aligned}$$

4) Используем таблицу эквивалентностей: $\sin 2x \sim 2x$, $\arcsin^2 x \sim x^2$, $\operatorname{arctg} x^2 \sim x^2$. Следовательно, $\sin 2x + \arcsin^2 x + \operatorname{arctg} x^2 \sim 2x$. Теперь

$$\text{имеем: } L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

$$5) \text{ Преобразуем предел так: } L_5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{1 + \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right).$$

Теперь сделаем замену $x = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$L_5 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2z)}{z}. \text{ Теперь используем эквивалентность}$$

$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha: L_5 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z}{z} = 2.$$

$$\begin{aligned} 6) L_6 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+2x^2-3x^3}-2}{x^2+5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^3}{8}}-1\right)}{x^2+5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3x^3}{8}\right)}{x^2+5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{8}x^2}{x+5} = 0. \end{aligned}$$

При нахождении пределов выражений вида $[u(x)]^{v(x)}$, где

$u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, удобно пользоваться формулой

$$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [v(x) \ln u(x)]} \quad (2.24)$$

Пример 2.40. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctgx}}; 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{x}\right)^x; 3) L_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$$

Решение. Используем формулу (2.24) и таблицу эквивалентностей.

$$1) L_1 = e^l, \text{ где } l = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctgx} \cdot \ln(1+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0,$$

$$L_1 = e^0 = 1.$$

$$2) L_2 = e^l, \text{ где } l = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\cos \frac{m}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left[1 - \left(1 - \cos \frac{m}{x} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left[1 - 2 \sin^2 \frac{m}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{m}{x} \right)^2 = 0, L_2 = e^0 = 1.$$

3) Сделаем замену: $t = x - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$, $x = 1 + t$. Тогда

$$L_3 = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2t+1}{t+1} \right)^{\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}} = e^l, \text{ где } l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)} \cdot \ln \left(\frac{2t+1}{t+1} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)} \cdot \ln \left(1 + \frac{t}{t+1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln(5+2t)}{-t(t+1)} = -\ln 5, L_3 = e^{-\ln 5} = \frac{1}{5}.$$

2.14. Непрерывность функции

Односторонние пределы.

Пусть область определения функции $f(x)$ содержит интервал (α, x_0) . Число a называется пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0 - 0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенствам $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Предел слева функции $f(x)$ в точке $x_0 \neq 0$ обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$. Если $x_0 = 0$, то пишут $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ или $f(-0)$ или $f(0_-)$.

Аналогично, в случае, когда область определения функции $f(x)$ содержит интервал (x_0, β) , вводится понятие предела справа,

который обозначают так: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$, если $x_0 \neq 0$, и $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ или $f(+0)$ или $f(0_+)$, если $x_0 = 0$. По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и односторонние бесконечные пределы: $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty$.

Например, запись $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = -\infty$ означает, что для каждого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) < -M$. Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют пределы слева и справа в этой точке и они равны; при этом $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Для односторонних пределов справедливы теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного и о пределе композиции функций.

Пример 2.41. Найти односторонние пределы функций.

$$1) f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{если } x \leq 1 \\ 3x-5, & \text{если } x > 1 \end{cases}, \text{ при } x \rightarrow 1;$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}, \text{ при } x \rightarrow 0; 3) f(x) = 3 + \frac{1}{7^{1/(1-x)}}, \text{ при } x \rightarrow 1;$$

$$4) f(x) = \frac{1}{2-2^{1/x}}, \text{ при } x \rightarrow 0; 5) f(x) = \frac{5}{(x-2)^3}, \text{ при } x \rightarrow 2.$$

Решение. 1) Пусть $x \leq 1$. Тогда $f(x) = -2x + 3$. Следовательно,

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -2 \cdot 1 + 3 = 1 - \text{предел слева. Если } x > 1,$$

то $f(x) = 3x - 5$; следовательно, $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 3 \cdot 1 - 5 = -2$ — предел справа.

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{x} = \sqrt{2} \frac{|\sin x|}{x}. \text{ По определению модуля}$$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}, \text{ (с точностью до периода } T = 2\pi).$$

$$\text{Следовательно, } f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\sqrt{2} \frac{\sin x}{x} \right) = -\sqrt{2} \cdot 1 = -\sqrt{2},$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{2} \frac{\sin x}{x} \right) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}.$$

3) Выражение $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty$, когда $x \rightarrow 1$ и $x < 1$, т.е. $x \rightarrow 1-0$, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 7^{1/(1-x)} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{7^{1/(1-x)}} = 0, f(1-0) = 3.$$

При $x \rightarrow 1, x > 1$, т.е. при $x \rightarrow 1+0$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow -\infty$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 7^{1/(1-x)} = 0, f(1+0) = +\infty.$$

4) При $x \rightarrow 0+$ имеем: $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $2^{1/x} \rightarrow +\infty$, $f(0+) = 0$. При

$$x \rightarrow 0- \text{ имеем: } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty, 2^{1/x} \rightarrow 0, \text{ поэтому } f(0-) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

5) При $x \rightarrow 2 - 0$ получаем: $x - 2 \rightarrow 0 -$, $(x - 2)^3 \rightarrow 0 -$,

$f(2 - 0) = -\infty$; при $x \rightarrow 2 + 0$ получаем: $x - 2 \rightarrow 0 +$, $(x - 2)^3 \rightarrow 0 +$,

$f(2 + 0) = +\infty$.

Непрерывность функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0

Определение I. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 если:

- 1) она определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;
- 2) она имеет предел в точке x_0 ;
- 3) этот предел равен $f(x_0)$ — значению функции $f(x)$ в точке x_0 т.е. :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.25)$$

Так как $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$, то равенству (2.29) можно придать сле-

дующую форму:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Следовательно, для непрерывной функции символы \lim и f можно переставить. Разность $x - x_0$ называют *приращением аргумента* и обозначают Δx , а разность $f(x) - f(x_0)$ называют *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx , и обозначают Δy , т.е. $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

В этих обозначениях можно дать следующее эквивалентное определение:

Определение II. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (2.26)$$

Пример 2.42. Доказать, используя определения, что 1) функция $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ непрерывна при любом значении x ;

2) функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 1 \\ 3x - 2, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Решение. 1) Пусть x_0 — произвольная точка числовой оси. Используя правила (2.15) — (2.17), находим $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4) = 3x_0^4 + 5x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 + 4.$$

Затем вычисляем значение функции в точке x_0

$$f(x_0) = 3x_0^4 + 5x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 + 4.$$

Сравнивая эти результаты, видим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в

точке x_0 в силу определения I. Поскольку x_0 — произвольная точка числовой оси, доказана непрерывность функции $f(x)$ для всех значений x .

2) Так как $f(1) = 1$, то достаточно показать, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(1 + \Delta x) - 1] = 0.$$

Рассмотрим две возможности:

а) $\Delta x < 0$, тогда имеем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(1 + \Delta x)^2 - 1] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 + 2 \cdot \Delta x] = 0$.

б) $\Delta x > 0$. В этом случае $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3(1 + \Delta x) - 3] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 \cdot \Delta x = 0$ и, так

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, следовательно (по определению II), функция $f(x)$ не-

прерывна в точке $x_0 = 1$.

Свойства функций, непрерывных в точке

1) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > A$

$(f(x_0) < A)$, то существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) > A$

$(f(x) < A)$ для всех x из интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

2) *Устойчивость знака непрерывной функции*: если функция $f(x)$

непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность

$(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 в которой $f(x)$ не обращается в ноль и

сохраняет один и тот же знак, а именно, знак числа $f(x_0)$.

Операции над непрерывными функциями

1) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда

функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) также непре-

рывны в точке x_0 .

2) *Переход к пределу под знаком непрерывной функции*.

Если функция $u = \varphi(x)$ в точке x_0 имеет предел A , а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(A)$, иными словами:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right]. \quad (2.27)$$

3) Непрерывность сложной функции.

Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)). \quad (2.28)$$

4) Основные элементарные функции a^x , x^a , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны во все точках, где они определены. Любая функция $f(x)$, образованная конечным числом алгебраических действий и взятий суперпозиций из основных элементарных функций, будет непрерывной во всех точках, в которых определены все составляющие ее элементарные функции, за исключением нулей знаменателей.

Точки разрыва функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ не определена в точке x_0 ;

2) функция $f(x)$ определена в точке x_0 но:

а) не существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

б) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но $f(x)$ не определена в точке

x_0 или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называют *точкой устранимого раз-*

рыва. Если в точке разрыва существуют не равные между собой од-

носторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$,

то x_0 называют *точкой разрыва типа "скачок"*, а разность

$\Delta f(x_0) = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ — *скачком функции $f(x)$ в точке x_0* .

Устранимый разрыв и скачок называются *разрывами 1-го рода*. Если

в точке разрыва x_0 не существует хотя бы один из односторонних

пределов, то x_0 называют *точкой разрыва 2-го рода*. Функцию

$f(x)$, определенную на промежутке $(a; x_0]$ ($[x_0; b)$), называют *не-*

прерывной слева в точке x_0 (непрерывной справа в точке x_0), если

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Функции, непрерывные на отрезке. Их свойства

Функцию $f(x)$ называют *непрерывной на отрезке $[a; b]$* ,

если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна

в точке a справа и в точке b слева. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда:

1) Если $f(x)$ принимает на концах отрезка разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то найдется хотя бы одна точка x_0 из интервала (a, b) , такая что $f(x_0) = 0$ (*Теорема о нуле функции*).

2) Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C , заключенного между числами A и B , найдется хотя бы одна такая точка x_0 на интервале (a, b) , что $f(x_0) = C$ (*Теорема о промежуточных значениях*).

3) Функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$, т.е. существует такое число $K > 0$, что $|f(x)| \leq K$ для всех x из отрезка $[a; b]$ (*Теорема Вейерштрасса*).

4) Функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a; b]$ своих наименьшего и наибольшего значений, т.е. найдутся точки x_1 и x_2 из отрезка $[a; b]$ такие, что $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ для всех x из отрезка $[a; b]$.

5) Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна на промежутке X , то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и строго монотонная на промежутке изменения функции $y = f(x)$ (*непрерывность обратной функции*).

Примеры решения задач

Исследовать функцию на непрерывность означает: 1) найти все точки разрыва и указать их вид, 2) в случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывности, 3) построить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва.

Пример 2.43. Исследовать на непрерывность функции.

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{11}{16}x, & \text{если } x < -1 \\ \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}, & \text{если } x \geq -1 \end{cases}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}; \quad 4) f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}; \quad 5) f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{\sin x}{x}.$$

Решение. 1) Функция не определена в точке $x=0$ и поэтому в ней разрывна. Кроме того, точкой возможного разрыва является точка $x=-1$, т.к. слева и справа от нее функция задается различными формулами. Исследуем эти точки. Для этого находим односторонние пределы в этих точках:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \text{ так как } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, 5^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty, \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0+;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}, \text{ так как } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty, 5^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0, \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ при } x \rightarrow 0-.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$, в точке $x=0$ функция имеет разрыв 1-го рода – скачок: скачок в точке $x=0$ равен

$$f(0+) - f(0-) = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}. \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(x^2 + \frac{11}{16}x \right) = \frac{5}{16},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(\frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{5}{16}, f(-1) = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1)$, в точке $x = -1$ функция непрерывна. Эскиз графика около точки разрыва дан на рис. 2.1.

2) Функция определена и непрерывна во всех точках, кроме $x = 1$, $x = 2$, в которых знаменатель обращается в ноль. Исследуем эти точки. Для $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x+1}{x-2} = -2.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, но $f(x)$ не существует в точке $x = 1$. В точке $x = 1$ — устранимый разрыв. Чтобы доопределить функцию до непрерывности в этой точке, полагаем $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.

$$\text{Для } x = 2: \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x+1}{x-2} = +\infty \text{ т.к. } x+1 \rightarrow 3, x-2 \rightarrow 0$$

$$\text{и } x-2 > 0; \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \text{ т.к. } x+1 \rightarrow 3,$$

$x-2 \rightarrow 0$ и $x-2 < 0$. Следовательно, в

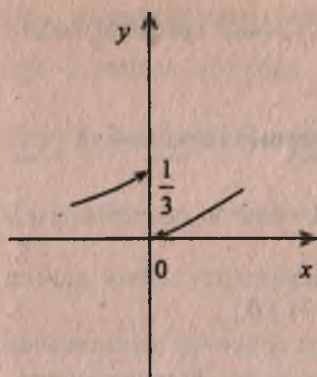


Рис.2.1.

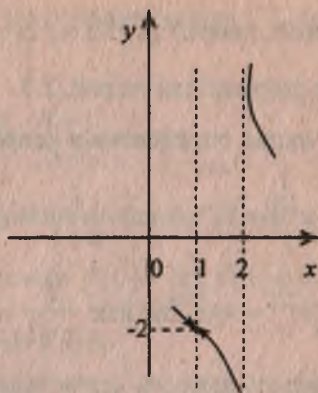


Рис.2.2.

точке $x=2$ разрыв 2-го рода. Эскиз графика около точек разрыва дан на рис. 2.2.

3) Функция определена и непрерывна во всех точках, кроме $x=1$ (нуля знаменателя). Находим односторонние пределы:

при $x \rightarrow 1-0$ $x-1 \rightarrow 0$, $x-1 < 0$, $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0$, следовательно

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

При $x \rightarrow 1+0$ $x-1 \rightarrow 0$, $x-1 > 0$, $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$, $2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty$, следо-

вательно $f(x) \rightarrow 0$, как функция обратная к бесконечно большой,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0.$$

Таким образом, пределы справа и слева в точке $x=1$ существуют, но не равны; в точке $x=1$ разрыв 1-го рода – скачок; скачок

функции равен $f(1+0) - f(1-0) = 0 - 1 = -1$. Эскиз графика около точек разрыва дан на рис. 2.3.

4) Функция определена и непрерывна везде, кроме точки $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = 0, \text{ так как } \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow -1-0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty, \text{ так как } \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow -1+0;$$

Поскольку один из односторонних пределов равен бесконечности, то при $x = -1$ разрыв 2-го рода. Эскиз графика около точки разрыва дан на рис. 2.4.

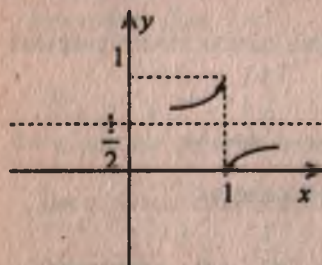


Рис. 2.3.

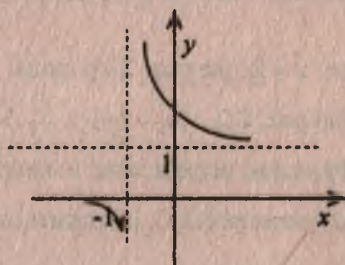


Рис. 2.4.

5) Функция определена и непрерывна везде, кроме точек $x = -1$, $x = 0$ (нулей знаменателя). Находим в этих точках односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{-2}{-0} \right) + \frac{\sin(-1)}{-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{-2}{+0} \right) + \frac{\sin(-1)}{-1} = -\infty.$$

Оба односторонних предела равны ∞ , следовательно, в точке $x = -1$ разрыв 2-го рода.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0-1}{0+1} + 1 = 0,$$

Следовательно, в точке $x = 0$ предел существует, но $f(0)$ не определена, имеем устранимый разрыв. Положив $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, мы доопределим функцию до непрерывности в нуле.

Пример 2.44. Найти значения параметров a (a и b), при которых

данные функции будут непрерывны. 1) $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{для } x < 0 \\ 2a + x & \text{для } x \geq 0 \end{cases}$;

$$2) f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{для } x < 2 \\ 3 & \text{для } x = 2 \\ x^2 + b & \text{для } x > 2 \end{cases}; \quad 3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} & \text{для } x \neq 1 \\ a & \text{для } x = 1 \end{cases}.$$

Решение. 1) Единственной точкой разрыва может быть точка $x = 0$.

$f(-0) = 4$, $f(+0) = 2a$. Равенство $f(-0) = f(+0) = f(0)$ будет выполнено, т.е. $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 0$, если $2a = 4$, $a = 2$.

2) Единственной точкой разрыва может быть точка $x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2-0) = 2a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = f(2+0) = 4 + b$. Функция

будет непрерывной в точке $x = 2$, если $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 3$, отсюда имеем систему уравнений
$$\begin{cases} 2a + 1 = 3 \\ 4 + b = 3 \end{cases}$$

Решив ее, получим $a = 1$, $b = -1$.

3) Единственной точкой разрыва может быть точка $x=1$.

$$\text{Найдем } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3.$$

Функция будет непрерывной в точке $x=1$, если $f(1) = a =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. Отсюда $a = 3$.

Пример 2.45. Найти точки разрыва и исследовать их характер для

функций 1) $y = \frac{1}{u^2 + u - 2}$, где $u = \frac{1}{x-1}$;

2) $y = f\{f[f(x)]\}$, где $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Решение. 1) Функция $u = \frac{1}{x-1}$ терпит разрыв в точке $x=1$. Функ-

ция $y = f(u) = \frac{1}{u^2 + u - 2} = \frac{1}{(u-1)(u+2)}$ терпит разрыв в точках

$u_1 = -2$ и $u_2 = 1$. По этим значениям u находим соответствующие

значения x , решая уравнения $-2 = \frac{1}{x-1}$, $1 = \frac{1}{x-1}$; отсюда $x = \frac{1}{2}$ и

$x = 2$.

Следовательно, сложная функция терпит разрыв в трех точках:

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Выясним характер разрывов в этих точках.

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{u \rightarrow \infty} y = 0$, следовательно, $x_2 = 1$ — точка устранимого разрыва.

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} y = \lim_{u \rightarrow -2} y = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{u \rightarrow 1} y = \infty$, следовательно, точки $x_1 = \frac{1}{2}$ и

$x_2 = 2$ — точки разрыва 2-го рода.

2) Точка $x=1$ есть точка разрыва функции $v = f(x) = \frac{1}{1-x}$. Если

$x \neq 1$, то $u = f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$, следовательно, точка $x=0$

есть точка разрыва функции $u = f[f(x)]$.

Если $x \neq 0$ и $x \neq 1$, то $u = f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$ непрерывна

везде. Таким образом, для этой сложной функции точки разрыва — это $x=0$ и $x=1$, причем эти разрывы устранимые.

Пример 2.46. Имеет ли решение уравнение $\sin x - x + 1 = 0$?

Решение. Функция $f(x) = \sin x - x + 1$ непрерывна на всей числовой оси; кроме того, эта функция меняет знак, так как $f(0) = 1$ и

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$. Следовательно, по теореме о нуле функции, внутри

отрезка $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ имеется, по крайней мере, одна точка x_0 для кото-

рой $f(x_0) = 0$, т.е. корень данного уравнения.

Глава 3. Производная и ее приложения

3.1. Производная функции. Правила дифференцирования

3.1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой внутренней точке x_0 интервала $(a; b)$. Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ также находится на $(a; b)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которое, очевидно, является функцией приращения аргумента Δx при фиксированном x_0 .

Определение 3.1. Предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (если он существует) называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Если в каждой точке $x \in (a; b)$ существует производная, т.е. существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой на $(a; b)$. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Пример 3.1. Используя определение, найти производные заданных функций в точке x_0

$$1) y = \sqrt{2+x}, x_0 = 0; 2) y = 3|x+1|, x_0 = -2;$$

$$3) y = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = -2, x_0 = 0.$$

Решение.

$$1) \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{2 + (0 + \Delta x)} - \sqrt{2 + 0} = \\ = \sqrt{2 + \Delta x} - \sqrt{2};$$

$$f'(x_0) = f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2 + \Delta x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})}{\Delta x (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})} = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$2) \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-2 + \Delta x) - f(-2) = \\ = 3|(-2 + \Delta x) + 1| - 3|-2 + 1| = 3|-1 + \Delta x| - 3;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3|-1 + \Delta x| - 3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\Delta x - 3}{\Delta x} = -3.$$

$$3) \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{(0 + \Delta x)^2} - \sqrt[3]{0^2} = \\ = \sqrt[3]{(\Delta x)^2}; f'(x_0) = f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty,$$

следовательно, данная функция при $x_0 = 0$ конечной производной не имеет. В этом случае также говорят, что производная обращается в бесконечность.

**3.1.2. Таблица производных
основных элементарных функций**

I. $(c)' = 0, c = \text{const.}$

II. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, -\infty < \alpha < +\infty;$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

III. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1; (e^x)' = e^x.$

IV. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0; (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0.$

V. $(\sin x)' = \cos x, -\infty < x < \infty.$

VI. $(\cos x)' = -\sin x, -\infty < x < \infty.$

VII. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

VIII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

IX. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

X. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty.$

XII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty.$

3.1.3. Правила дифференцирования

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное (последнее при условии $v(x) \neq 0$) также имеют производные в точке x_0 , причем, в точке x_0 справедливы равенства:

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u' + v'; & (u-v)' &= u' - v'; \\ (uv)' &= u'v + uv'; & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

В частности при $c = \text{const}$ получаем: $(cu)' = cu'$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Пример 3.2. Найти производные функций:

$$1) y = 3 \cos x - \frac{1}{2} \ln x; \quad 2) y = 2^x \cdot \sin x \quad 3) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Используем таблицу и правила дифференцирования:

$$\begin{aligned}1) y' &= \left(3 \cos x - \frac{1}{2} \ln x\right)' = [u = \cos x, v = \ln x] = (3 \cos x)' - \left(\frac{1}{2} \ln x\right)' = \\ &= -3 \sin x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) y' &= (2^x \cdot \sin x)' = [u = 2^x, v = \sin x] = (2^x)' \cdot \sin x + 2^x \cdot (\sin x)' = \\ &= 2^x \ln 2 \sin x + 2^x \cos x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \ y &= \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} \right)' = [u = \operatorname{tg} x, v = \sqrt{x}] = \frac{(\operatorname{tg} x)' \sqrt{x} - \operatorname{tg} x (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \sqrt{x} - \operatorname{tg} x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}.
 \end{aligned}$$

3.1.4. Производная сложной функции

Если функция $u = g(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = \varphi(x) = f(g(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причем,

$$y'(x_0) = \varphi'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0). \quad (3.3)$$

Это правило нахождения производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций.

Формула (3.3) фактически означает следующее: чтобы найти производную сложной функции, надо каждую из функций – внешнюю $f(u)$ и внутреннюю $g(x)$ продифференцировать по своему аргументу, руководствуясь таблицей производных, и результаты дифференцирования перемножить.

Пример 3.3. Найти производные функций:

$$1) \ y = \sin 7x; \quad 2) \ y = \operatorname{tg}(x^2); \quad 3) \ y = \sqrt{\arcsin(5x + 2e^x)};$$

$$4) y = \frac{1}{\cos(x^3 \sin 9x)}; \quad 5) y = \operatorname{arctg}^5 \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right).$$

Решение. 1) $y' = (\sin 7x)' = (\cos 7x) \cdot (7x)' = 7 \cos 7x;$

$$2) y' = (\operatorname{tg}(x^2))' = \frac{1}{\cos^2(x^2)} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}.$$

$$\begin{aligned} 3) y' &= \left(\sqrt{\arcsin(5x + 2e^x)} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(5x + 2e^x)}} \cdot (\arcsin(5x + 2e^x))' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(5x + 2e^x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2e^x)^2}} \cdot (5x + 2e^x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(5x + 2e^x)}} \cdot \frac{5 + 2e^x}{\sqrt{1 - (5x + 2e^x)^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) y' &= \left(\frac{1}{\cos(x^3 \sin 9x)} \right)' = (\cos^{-1}(x^3 \sin 9x))' = -\frac{1}{\cos^2(x^3 \sin 9x)} \times \\ &\times (\cos(x^3 \sin 9x))' = -\frac{1}{\cos^2(x^3 \sin 9x)} \cdot (-\sin(x^3 \sin 9x)) \cdot (x^3 \sin 9x)' = \\ &= \frac{\sin(x^3 \sin 9x)}{\cos^2(x^3 \sin 9x)} \cdot \left((x^3)' \sin 9x + x^3 (\sin 9x)' \right) = \frac{\sin(x^3 \sin 9x)}{\cos^2(x^3 \sin 9x)} \times \\ &\times (3x^2 \sin 9x + 9x^3 \cos 9x). \end{aligned}$$

$$5) y' = \left(\operatorname{arctg}^5 \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right) \right)' = 5 \operatorname{arctg}^4 \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x^7}{\arcsin 8x} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \operatorname{arctg}^4 \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right)^2} \cdot \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right)' = \\
&= 5 \operatorname{arctg}^4 \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right)^2} \cdot \frac{(x^7)' \arcsin 8x - x^7 (\arcsin 8x)'}{(\arcsin 8x)^2} = \\
&= 5 \operatorname{arctg}^4 \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x^7}{\arcsin 8x} \right)^2} \cdot \frac{7x^6 \arcsin 8x - x^7 \cdot \frac{8}{\sqrt{1-(8x)^2}}}{(\arcsin 8x)^2}.
\end{aligned}$$

Логарифмическое дифференцирование

В некоторых случаях, например, когда $y = f(x)$ представляет собой сложно-показательную функцию вида $f(x) = (u(x))^{v(x)}$ или произведение большого числа сомножителей, удобно сначала прологарифмировать данное выражение, а затем взять производную от обеих частей полученного равенства, при этом $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$.

Пример 3.4. Найти производные функций:

$$1) y = x^{\lg 8x}; \quad 2) y = (\sqrt{x} \ln x)^{x^2 + \sin 5x}.$$

Решение. 1) Логарифмируя равенство $y = x^{\lg 8x}$ и используя формулу

$\log_a x^b = b \log_a x$, получим: $\ln y = \lg 8x \ln x$, откуда

$(\ln y)' = (\operatorname{tg} 8x \ln x)'$. Применяя в левой части этого равенства формулу дифференцирования сложной функции (внешняя функция – логарифм от y , внутренняя – y), а в правой части – формулу для производной произведения, получим:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\operatorname{tg} 8x)' \ln x + \operatorname{tg} 8x (\ln x)', \quad \frac{y'}{y} = \frac{8}{\cos^2 8x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 8x}{x},$$

$$\text{откуда } y' = y \left(\frac{8}{\cos^2 8x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 8x}{x} \right) = x^{\operatorname{tg} 8x} \left(\frac{8}{\cos^2 8x} \ln x + \frac{\operatorname{tg} 8x}{x} \right).$$

$$2) \ln y = \ln (\sqrt{x} \ln x)^{x^2 + \sin 5x}, \quad \ln y = (x^2 + \sin 5x) \cdot \ln (\sqrt{x} \ln x),$$

$$\frac{y'}{y} = \left((x^2 + \sin 5x) \cdot \ln (\sqrt{x} \ln x) \right)' = (x^2 + \sin 5x)' \cdot \ln (\sqrt{x} \ln x) +$$

$$+ (x^2 + \sin 5x) \cdot (\ln (\sqrt{x} \ln x))'. \text{ Находим, отдельно производные каж-}$$

$$\text{дого из сомножителей: } (x^2 + \sin 5x)' = 2x + 5 \cos 5x,$$

$$(\ln (\sqrt{x} \ln x))' = (\ln \sqrt{x} + \ln \ln x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}. \text{ Тогда}$$

$$y' = (\sqrt{x} \ln x)^{x^2 + \sin 5x} \cdot \left[(2x + 5 \cos 5x) \cdot \ln (\sqrt{x} \cdot \ln x) + \right. \\ \left. + (x^2 + \sin 5x) \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x \ln x} \right) \right].$$

Пример 3.5. Найти производные функций

$$1) y = \frac{x^3 \operatorname{tg} 13x \cdot \operatorname{arctg}^4 13x}{\sqrt{\ln x} \cdot \sin 17x}; \quad 2) y = \sqrt[7]{\frac{x^6 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}}{\cos^5 5x \cdot 3^x}}.$$

Решение. 1) Логарифмируем равенство и, используя свойства логарифмов, получим: $\ln y = \ln \frac{x^5 \operatorname{tg} 11x \cdot \operatorname{arctg}^4 13x}{\sqrt{\ln x} \cdot \sin 17x} =$

$$= \ln x^5 + \ln \operatorname{tg} 11x + \ln \operatorname{arctg}^4 13x - \ln \sqrt{\ln x} - \ln \sin 17x, \text{ или}$$

$$\ln y = 5 \ln x + \ln \operatorname{tg} 11x + 4 \ln \operatorname{arctg} 13x - \frac{1}{2} \ln \ln x - \ln \sin 17x.$$

Находя производные от обеих частей этого равенства, получим:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = & 5 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{tg} 11x} \cdot \frac{1}{\cos^2 11x} \cdot 11 + 4 \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} 13x} \cdot \frac{1}{1 + (13x)^2} \cdot 13 - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin 17x} \cdot \cos 17x \cdot 17. \end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для y' : $y' = \frac{x^5 \operatorname{tg} 11x \cdot \operatorname{arctg}^4 13x}{\sqrt{\ln x} \cdot \sin 17x} \times$

$$\times \left[\frac{5}{x} + \frac{11 \operatorname{ctg} 11x}{\cos^2 11x} + \frac{52}{(1 + 169x^2) \operatorname{arctg} 13x} - \frac{1}{2x \ln x} - 17 \operatorname{ctg} 17x \right].$$

2) $\ln y = \frac{6}{7} \ln x + \frac{1}{7} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{5}{7} \ln \cos 5x + \frac{x}{7} \ln 3$, откуда, находя производные от обеих частей, получим:

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{7 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}} \right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{7 \cos 5x} (-\sin 5x) \cdot 5 + \frac{\ln 3}{7},$$

$$y' = \sqrt[7]{\frac{x^6 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}}{\cos^5 5x \cdot 3^4}} \cdot \left(\frac{6}{7x} - \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}{21 \sin^2 \frac{x}{3}} + \frac{25}{7} \operatorname{tg} 5x + \frac{\ln 3}{7} \right).$$

3.1.5. Производные обратной функции и функций, заданных параметрически и неявно

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 , имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и имеет производную в точке y_0 , причем

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (3.4)$$

Более короткая запись: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, или $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Пример 3.6. Найти производную функции, обратной к данной, если

1) $y = x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $y = x + e^x$.

Решение. 1) Данная функция всюду непрерывна и строго монотон-

на, ее производная $y' = \frac{dy}{dx} = 1 + 3x^2 > 0$, следовательно, существует

обратная функция $x = x(y)$ и $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + 3x^2}$.

2) Имеем $y' = 1 + e^x$, следовательно, $x'_y = \frac{1}{1 + e^x}$.

Отметим попутно, что в этих двух примерах как сами обратные функции $x = f^{-1}(y)$, так и их производные $x'(y)$ не выражаются в явном виде через аргумент y , поскольку уравнения 1) и 2) нельзя разрешить относительно x (подробнее о неявных функциях и их производных см. ниже).

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ переменной t (параметра) определены в некоторой окрестности точки t_0 , причем функция $x = x(t)$ имеет в этой окрестности обратную $t = t(x)$. Тогда уравне-

ния $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ параметрически задают в окрестности точки

$x_0 = x(t_0)$ функцию $y = f(x)$. Если, кроме того, $x(t)$ и $y(t)$ имеют

в точке t_0 производные, причем, $x'(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt} \neq 0$, то функция

$y = f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, которая может быть найдена по формуле:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\frac{dy(t_0)}{dt}}{\frac{dx(t_0)}{dt}}. \quad (3.5)$$

Эту формулу обычно записывают короче: $y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$ или

еще короче $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, где точкой, как это обычно принято, обозначена производная по параметру t .

Пример 3.7. Для функций $y = f(x)$, заданных параметрически, найти производную y'_x , если: 1) $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$;

2) $x = 2 \ln \operatorname{ctg} t$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$; 3) $x = t^2 + t$, $y = t^3 - 3t$ ($t \geq 0$), $x_0 = 6$.

Решение. 1) $x'_t = -3a \cos^2 t \cdot \sin t$, $y'_t = 3b \sin^2 t \cdot \cos t$, тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad \text{при } t_0 = \frac{\pi}{4} \text{ получим:}$$

$$y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}.$$

Поскольку $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, то $y'_x \Big|_{x=\frac{a\sqrt{2}}{4}} = y'(x) \Big|_{x=\frac{a\sqrt{2}}{4}} = -\frac{b}{a}$.

$$2) \quad x'_t = \frac{2}{\operatorname{ctg} t} \cdot \frac{-1}{\sin^2 t} = -\frac{4}{\sin 2t}, \quad y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = -\frac{4 \cos 2t}{\sin^2 2t},$$

$$\text{тогда } y'_x = \frac{4 \cos 2t \sin 2t}{4 \sin^2 2t} = \operatorname{ctg} 2t \quad \left(t \neq \frac{k\pi}{2} \right).$$

3) $x'_t = 2t + 1$, $y'_t = 3t^2 - 3$, тогда $y'_x = \frac{3t^2 - 3}{2t + 1}$; если $x_0 = 6$, то, решая

уравнение $t^2 + t = 6$, находим $t_0 = 2$ ($t_0 = -3$ — посторонний корень

по условию задачи), и $y'_x(6) = \frac{3 \cdot 4 - 3}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{9}{5}$.

Если дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, т.е. задана неявно, то, дифференцируя это уравнение по x и рассматривая y как функцию от x , получим уравнение относительно y'_x .

Условия, при которых уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как дифференцируемую функцию от x , изучаются в разделе математического анализа, посвященном функциям нескольких переменных (см. раздел 4.4 методички; там же можно найти другой способ дифференцирования неявной функции).

Пример 3.8. Найти производную y'_x от функций $y(x)$, заданных неявно: 1) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$; 2) $x^4 + \ln y = x^2e^y$; 3) $x \sin y + y \sin x = 0$.

Решение. 1) Дифференцируем по x обе части уравнения, считая y

функцией от x : $(x^3 + x^2y + y^2)' = (0)'$, $(x^3)' + (x^2y)' + (y^2)' = 0$,

$3x^2 + (x^2)'y + x^2y' + 2yy' = 0$, $3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$, или

$y'(x^2 + 2y) = -3x^2 - 2xy$; отсюда $y' = \frac{-3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}$.

2) Действуем аналогично: $(x^4 + \ln y)' = (x^2e^y)'$,

$(x^4)' + (\ln y)' = (x^2e^y)'$, $4x^3 + \frac{1}{y}y' = 2xe^y + x^2e^yy'$,

отсюда легко получаем: $y' = \frac{(2xe^y - 4x^3)y}{1 - x^2 ye^y}$.

$$3) (x \sin y)' + (y \sin x)' = 0,$$

$$(x)' \sin y + x(\sin y)' + (y)' \sin x + y(\sin x)' = 0,$$

$\sin y + x \cdot \cos y \cdot y' + y' \sin x + y \cos x = 0$, отсюда

$$y' = -\frac{y \cos x + \sin y}{x \cos y + \sin x}.$$

3.2. Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной

На графике функции $y = f(x)$ возьмем две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Секущая, т.е. прямая, проходящая через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ кривой $y = f(x)$, имеет уравнение

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} (x - x_0), \text{ которое легко получается,}$$

если использовать известное из аналитической геометрии уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется прямая, являющаяся предельным положением секущей (если оно существует), когда точка M стремится к точке M_0 ($M \rightarrow M_0$).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 то при $M \rightarrow M_0$ угловой коэффициент касательной равен пределу углового коэффициента секущей:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ будет иметь вид:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad (3.6)$$

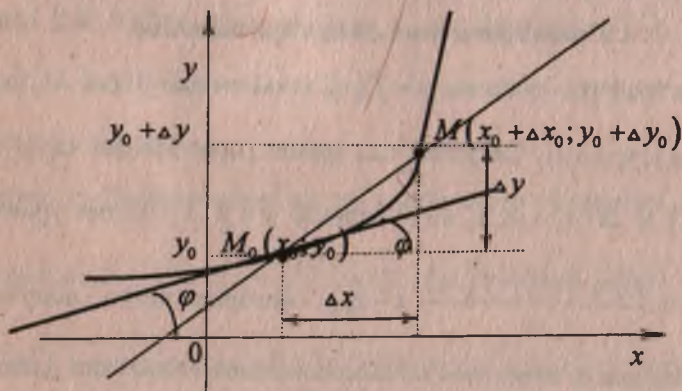


Рис. 3.1.

Из формулы (3.6) следует *геометрический смысл производной*: производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, к положительному направлению оси Ox , т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ (см рис. 3.1).

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 и имеет уравнение

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0), \text{ где } f'(x_0) \neq 0. \quad (3.7)$$

Если $f'(x_0) = 0$, то нормаль имеет уравнение $x = x_0$.

Пусть заданы функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, графики которых пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3.2). За угол φ между графиками этих функций принимается по определению меньший из двух углов между касательными к этим графикам, проведенными в точке M_0 , при этом

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f'_1(x_0) - f'_2(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)} \right|, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (3.7a)$$

Если $1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0) = 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

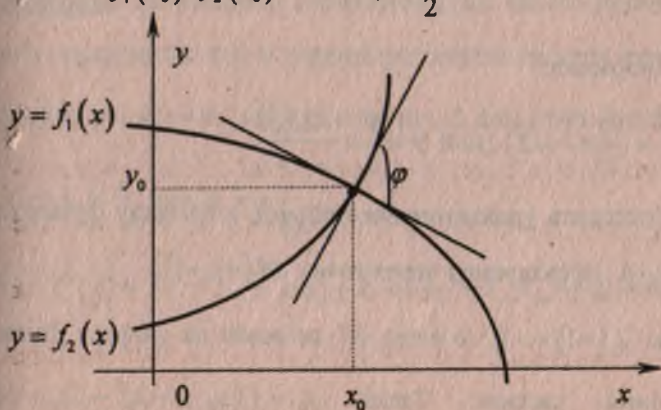


Рис. 3.2.

Пример 3.9. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{2x}{1+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \sqrt{2}$.

Решение. Находим производную

$$y'(x) = f'(x) = 2 \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Вычисляем значения функции и ее производной в точке $x_0 = \sqrt{2}$:

$$f(x_0) = f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad f'(x_0) = f'(\sqrt{2}) = 2 \frac{1-(\sqrt{2})^2}{(1+(\sqrt{2})^2)^2} = -\frac{2}{9}.$$

По формуле (3.6) записываем уравнение касательной:

$$y - \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{2}{9}(x - \sqrt{2}), \text{ или } y = -\frac{2}{9}x + \frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

Поскольку $-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{-\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}$, то по формуле (3.7) записы-

ваем уравнение нормали:

$$y - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{9}{2}(x - \sqrt{2}), \text{ или } y = \frac{9}{2}x - \frac{23\sqrt{2}}{6}.$$

Пример 3.10. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, проходящей через точку $M(-1, -1)$.

Решение. Так как $f(-1) \neq -1$, то точка M не лежит на графике. Пусть (x_0, y_0) — точка касания. Тогда $y_0 = f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$;

$f'(x_0) = -2x_0 - 5$, и уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ принимает вид: $y = (-2x_0 - 5)(x - x_0) - x_0^2 - 5x_0 - 6$.

Поскольку касательная проходит через точку $M(-1, -1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению касательной:

$-1 = (-2x_0 - 5)(-1 - x_0) - x_0^2 - 5x_0 - 6$. Решив это квадратное относительно x_0 уравнение, получим $x_0 = 0$ или $x_0 = -2$. При $x_0 = 0$ получаем: $f(x_0) = -6$, $f'(x_0) = -5$ и уравнение касательной:

$y = -5x - 6$. При $x_0 = -2$ получаем $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = -1$ и уравнение касательной: $y = -x - 2$.

Пример 3.11. На кривой $y = x^3 - 3x + 5$ найти точки, в которых касательная: 1) параллельна прямой $y = -2x$; 2) перпендикулярна прямой $y = -\frac{x}{9}$.

Решение. Используем геометрический смысл производной и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых $y = k_1x + b_1$

(L_1) и $y = k_2x + b_2$ (L_2) , а именно: $L_1 \parallel L_2$ если $k_1 = k_2$; $L_1 \perp L_2$, если

$$1 + k_1k_2 = 0, \text{ или } k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

1) $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x_0) = k_1 = 3x_0^2 - 3$, $k_2 = -2$, откуда:

$3x_0^2 - 3 = -2$. Получаем два значения: $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда

$$y_0 = f(x_0) = 5 \mp \frac{8\sqrt{3}}{9}. \text{ Искомые точки } - M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 5 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right),$$

$$M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 5 - \frac{8\sqrt{3}}{9}\right).$$

2) В этом случае $k_2 = -\frac{1}{9}$, $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, следовательно,

$$k_1 = 9, \text{ т.е. } 3x_0^2 - 3 = 9; \text{ отсюда } x_0 = \pm 2, y_0 = f(x_0) = f(-2) = 3;$$

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 7.$$

Искомые точки $M_1(-2; 3)$ и $M_2(2; 7)$.

Пример 3.12. Найти угол между эллипсами $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ и

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение. Так как эллипсы расположены симметрично относительно координатных осей, то можно ограничиться рассмотрением только первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$) координатной плоскости. Решив сис-

$$\text{тему } \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}, \text{ найдем точку пересечения эллипсов } M_1\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

Дифференцируя по x уравнение первого эллипса, получаем

$$\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0, \quad \text{т.е.} \quad y'(x) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{и, следовательно,}$$

$$y'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{9}{16}. \quad \text{Аналогично получим, что для второго эллипса}$$

$$y'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{16}{9}. \quad \text{Тогда по формуле (3.7а) получаем:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left| -\frac{9}{16} - \left(-\frac{16}{9} \right) \right|}{\left| 1 + \left(-\frac{9}{16} \right) \cdot \left(-\frac{16}{9} \right) \right|} = \frac{175}{288}.$$

Итак, эллипсы пересекаются в четырех точках (найдите координаты остальных трех) под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{175}{288}\right) \approx 31^\circ$.

Физический смысл производной

Средней скоростью изменения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют отношение:

$$\bar{v} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3.8)$$

Мгновенной скоростью, или скоростью изменения функции $f(x)$ в точке x называется предел:

$$v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Таким образом, производная есть скорость изменения функции. На интерпретации производной как величины мгновенной скорости изменения функции основано применение производной к изу-

чению физических явлений. В частности, если t — время, $x = S(t)$ — координата точки, движущейся по оси OX , то $S'(t_0)$ — мгновенная скорость точки в момент времени t_0 .

Пример 3.13. Для функции $S = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ найти среднюю скорость изменения на отрезке $\left[\frac{2}{\pi}; \frac{6}{\pi}\right]$ и мгновенную скорость изменения в точке $t_0 = \frac{3}{\pi}$.

Решение. $S(b) = S\left(\frac{6}{\pi}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $S(a) = S\left(\frac{2}{\pi}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

По формуле (3.8) находим $\bar{v} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{6}{\pi} - \frac{2}{\pi}} = -\frac{\pi}{8} \approx -0.39$.

Поскольку $S' = -\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t}$, то мгновенная скорость в точке $t_0 = \frac{3}{\pi}$ будет равна: $v = S'\left(\frac{3}{\pi}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^2} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2} \approx -0.54$. Знак минус

означает, что функция убывает.

Пример 3.14. Тело массы $m = 1.5 \text{ кг}$ движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t + 1 (\text{м})$. Найти кинетическую энергию тела через время $t_0 = 5 \text{ с}$ после начала движения.

Решение. Скорость тела $v = s'(t) = 2t + 1$; кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2t+1)^2. \text{ При } t_0 = 5\text{с получаем:}$$

$$K(t_0) = \frac{1}{2}1.5(2 \cdot 5 + 1)^2 = 90.75 \text{ Дж.}$$

3.3. Дифференциал

Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x), \quad (3.9)$$

где число $A(x_0)$ не зависит от Δx и $\alpha(\Delta x)$ — функция от Δx , такая

что $\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Таким образом, для дифференцируемой функции ее приращение состоит из двух слагаемых: $A(x_0)\Delta x$ — главная часть приращения, линейно зависящая от приращения Δx , и $\alpha(\Delta x)$ — нелинейная функция от аргумента Δx , которая является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$.

Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в этой точке, причем $A(x_0) = f'(x_0)$.

Определение 3.3. Главная (линейная) часть приращения функции $A(x_0)\Delta x = f'(x_0)\Delta x$ называется *дифференциалом* функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$, т.е.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \quad (3.10)$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается также dy .

Если аргумент x функции $y = f(x)$, является независимой переменной, то, согласно *определению*, его приращение и дифференциал равны между собой, т.е. $\Delta x = dx$, что позволяет записать окончательный вид выражения для дифференциала:

$$dy = f'(x)dx, \quad (3.11)$$

откуда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ или $y' = \frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала виден из рисунка (3.3). Если L — касательная к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 , то $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ и $AB = M_0A \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = df(x_0) = dy$ — главная, линейная часть приращения $\Delta y = AM$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 , т.е. дифференциал.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 численно равен приращению AB ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

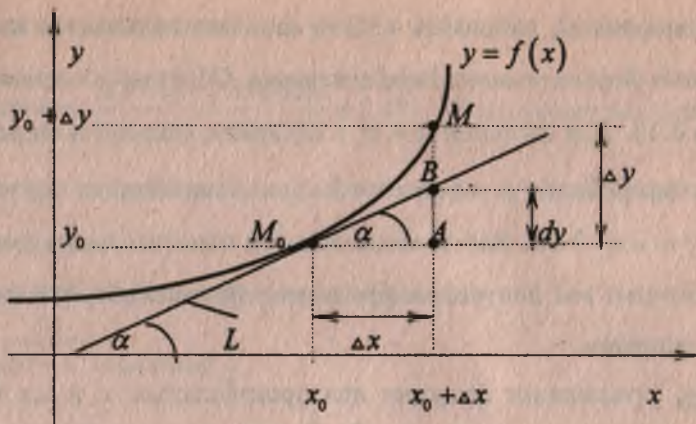


Рис. 3.3.

Нелинейная часть приращения функции равна

$$BM = AM - AB = \Delta y - dy = o(\Delta x)$$

Отсюда при малых Δx имеем: $\Delta y \approx dy$, или

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x. \quad (3.12)$$

Последняя формула используется для приближенных вычислений.

Свойства дифференциала

1. Для любых дифференцируемых функций $u = u(x)$, $v = v(x)$ и постоянных α и β имеют место формулы:

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv \quad d(uv) = u dv + v du \quad (3.13)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \text{ (если } v \neq 0 \text{)}.$$

2. Формула $dy = f'(x)dx$ остается справедливой и в том случае, когда x является не независимой переменной, а функцией независи-

мого аргумента, например, t . Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*. Обратимся к примерам.

Пример 3.15. Для функции $y = x^3 + 2x$ найти, пользуясь определением, дифференциал в точке $x = 2$ при приращениях аргумента $\Delta x = 0.1$, и $\Delta x = 0.01$. Найти абсолютные и относительные погрешности, которые мы допускаем при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение. Приращение функции при произвольных x и Δx будет иметь вид: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = [(x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x)] - (x^3 + 2x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x = (3x^2 + 2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$. Откуда получаем: дифференциал $dy = (3x^2 + 2)\Delta x$ — главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции и

$\alpha(\Delta x) = \Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ — б.м. высшего порядка чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

1) При $x = 2$ и $\Delta x = 0.1$ имеем: $dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0.1 = 1.4$,

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) = 1.4 + 3 \cdot 2 \cdot (0.1)^2 + (0.1)^3 = 1.461.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0.061$.

Относительная погрешность $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = \frac{0.061}{1.461} \approx 4\%$.

2) При $x = 2$ и $\Delta x = 0.01$ имеем: $dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0.01 = 0.14$,

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) = 0.14 + 3 \cdot 2 \cdot (0.01)^2 + (0.01)^3 = 0.140601.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0.000601$, относительная

погрешность $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = \frac{0.000601}{0.140601} \approx 0.4\%$. Этот пример наглядно по-

казывает, что приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ будет тем точнее, чем меньше Δx .

Пример 3.16. Найти дифференциал функции

$$y = x\sqrt{64 - x^2} + 64 \arcsin \frac{x}{8}.$$

Решение. Используя формулы (3.13), получаем

$$\begin{aligned} dy &= d\left(x\sqrt{64 - x^2}\right) + d\left(64 \arcsin \frac{x}{8}\right) = x d\sqrt{64 - x^2} + \\ &+ \sqrt{64 - x^2} dx + 64 d\left(\arcsin \frac{x}{8}\right) = x \frac{d(64 - x^2)}{2\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2} dx + 64 \frac{d\left(\frac{x}{8}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^2}} = \\ &= \frac{-x^2 dx}{\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2} dx + 64 \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}} = 2\sqrt{64 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Тот же результат получается, если находить дифференциал по формуле $dy = y' dx$. (Убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 3.17. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{17}$; 2) $\operatorname{arctg}(0.98)$.

Решение. 1) Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как значение функции

$y = \sqrt[4]{x}$ при $x_1 = x_0 + \Delta x = 17$, считая, $x_0 = 16$. Тогда

$y_0 = y(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$. Далее: $y'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, тогда

$$y'_0 = y'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}, \quad \Delta x = x_1 - x_0 = 17 - 16 = 1 \text{ и по формуле (3.12)}$$

$$\text{получаем: } \sqrt[4]{17} = y(x_1) \approx y_0 + y'_0 \Delta x = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2.031.$$

2) Пусть $\arctg(0.98)$ есть частное значение функции $y = \arctg x$ при

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.98. \text{ Примем } x_0 = 1, \text{ тогда } y_0 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y'_0 = y'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}, \quad \Delta x = x_1 - x_0 = 0.98 - 1 = -0.02 \text{ и по формуле}$$

$$(3.12) \text{ получаем: } \arctg(0.98) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (-0.02) \approx 0.7754.$$

3.4 Бесконечные и односторонние производные

Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty (-\infty)$, то говорят, что

функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *бесконечную положительную (отрицательную) производную*. В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$, проведенная в точке x_0 перпендикулярна оси OX . Конечные односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно *правой и левой односторонними производными* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначаются $f'_+(x_0)$ и

$f'_-(x_0)$, или $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$. Для существования производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно существование в этой точке правой и левой односторонних производных и их равенство.

Пример 3.18. Исследовать дифференцируемость функции в указанных точках x_0

$$1) f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0; \quad 2) f(x) = |\sin 2x|, x_0 = 0.$$

Решение. 1) Так как функция $f(x)$ задается различными аналитическими выражениями на лучах $(-\infty; 0)$ и $[0; +\infty)$, вычислим левую и правую производную в точке $x_0 = 0$. Если $\Delta x > 0$, то,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \Delta x = 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то $f(0 + \Delta x) = \Delta x^3$, поэтому

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta x^3}{\Delta x} = 0. \text{ Так как}$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) = 0, \text{ то } f'(0) \text{ существует и } f'(0) = 0.$$

2) Вычисляем $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$. Так как $f(0) = 0$, то

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = 2;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = -2. \text{ Поскольку, } f'_+(0) \neq f'_-(0),$$

то $f'(0)$ не существует и функция $f(x)$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Пример 3.19. Составить уравнение касательной к графику функции $y = |\ln x|$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. При $x_0 = 1$, $\Delta y = |\ln(1+\Delta x) - \ln 1| = |\ln(1+\Delta x)|$. Из определения модуля и свойств логарифма получаем:

$$\Delta y = \begin{cases} \ln(1+\Delta x) & \text{при } \Delta x \geq 0 \\ -\ln(1+\Delta x) & \text{при } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x > 0 \\ \frac{-\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x < 0 \end{cases}$. Используя известную экви-

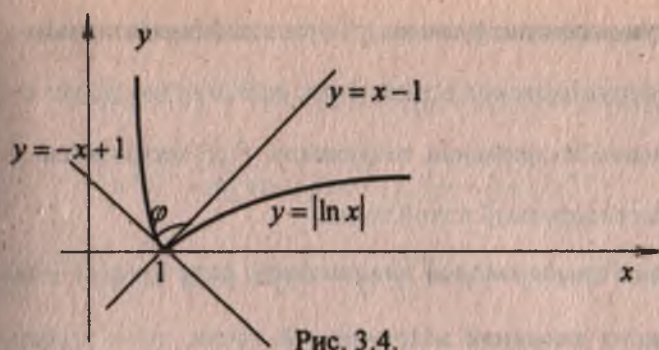
валентность: $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$, получаем $f'_+(1) = 1$, $f'_-(1) = -1$. Так как эти значения различны, то $f'(1)$ не существует, т.е. в точке x_0 нет двусторонней касательной, однако есть правая L_+ и левая L_- касательные:

$$L_+ : y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1);$$

$$L_- : y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x - 1), \text{ или}$$

$$L_+ : y = x - 1; \quad L_- : y = -x + 1 \text{ (см. рис. 3.4).}$$

Поскольку $k_+ = 1$, $k_- = -1$, то $1 + k_+ \cdot k_- = 0$ и угол между касательными 90° .



3.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 3.4. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале $(a; b)$. Производную $f'(x)$ называют производной первого порядка, или первой производной функции $f(x)$. Если функция $f'(x)$, в свою очередь, имеет производную на $(a; b)$, то ее производную называют второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$. Т.е. по определению $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогично определяется производная n -го порядка или n -ая производная: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, если на интервале $(a; b)$ существует конечная производная $f^{(n-1)}(x)$. По определению полагают $f^{(0)}(x) = f(x)$, т.е. функцию $f(x)$ называют нулевой производной.

Функция, имеющая в точке x_0 n -ую производную, называется n раз дифференцируемой в этой точке; если в точке x_0 существуют производные всех порядков, то функция $f(x)$ называется бесконечно дифференцируемой в этой точке.

Физический смысл второй производной: если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s''(t)$ есть ускорение этой точки в момент времени t .

Основные правила нахождения n -х производных

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные порядка n , то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, и $u(x) \cdot v(x)$, где α и β — постоянные, также имеют производные порядка n , причем

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)} \quad (3.14)$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad (3.15)$$

$$\text{где } u^{(0)} = u, \quad v^{(0)} = v, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Формула (3.15) называется *формулой Лейбница*.

Имеют место также следующие формулы:

$$\left((ax+b)^p\right)^{(n)} = a^n p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)(ax+b)^{p-n};$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^{m-n}; \quad (3.16)$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x; \quad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n};$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Для функции, обратной к $y = f(x)$, имеет место формула

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}. \quad (3.17)$$

Если функция $y = f(x)$ задана параметрически, то ее вторая производная может быть найдена по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}. \quad (3.18)$$

Пример 3.20. Для данных функций найти производные указанного порядка:

1) $y = x^5 - 7x^3 + 2$, $y''' - ?$; 2) $y = \arctg 2x$, $y'' - ?$;

3) $y = x^3 e^x$, $y^{(4)} - ?$

Решение. 1) Находим последовательно:

$$y' = (x^5 - 7x^3 + 2)' = 5x^4 - 21x^2,$$

$$y'' = (y')' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x,$$

$$y''' = (y'')' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42.$$

$$2) y' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{2}{1+4x^2}; \quad y'' = (y')' = 2 \left((1+4x^2)^{-1} \right)' = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}.$$

$$3) \text{ Находим последовательно: } (x^3)' = 3x^2, \quad (x^3)'' = 6x, \quad (x^3)''' = 6,$$

$$(x^3)^{(4)} = 0; \quad (e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = (e^x)^{(4)} = e^x. \text{ Запишем формулу}$$

$$\text{Лейбница для } n=4: (uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}.$$

Применяя эту формулу для $u = x^3$, $v = e^x$, получим:

$$y^{(4)} = (x^3 e^x)^{(4)} = 4 \cdot 6e^x + 6 \cdot 6xe^x + 4 \cdot 3x^2 e^x + x^3 e^x, \text{ или}$$

$$y^{(4)} = (x^3 + 12x^2 + 36x + 24)e^x.$$

Пример 3.21. Найти y''_{xx} , если

$$1) x = a \cos^3 t; y = b \sin^3 t; \quad 2) \operatorname{arctg} y - y + x^3 = 0.$$

Решение. 1) 1-й способ. Функция $y(x)$ задана параметрически, применяем формулу (3.18):

$$y'_t = 3b \sin^2 t \cos t; \quad x'_t = -3a \cos^2 t \sin t;$$

$$y''_n = 3b(\sin^2 t \cos t)' = 3b[(\sin^2 t)' \cos t + \sin^2 t (\cos t)'] =$$

$$= 3b(2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t);$$

$$x''_n = -3a(\cos^2 t \sin t)' = -3a[(\cos^2 t)' \sin t + \cos^2 t (\sin t)'] =$$

$$= -3a(-2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t).$$

Тогда $y''_{xx} = [-3a \cos^2 t \sin t \cdot 3b(2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) -$

$$-(-3a)(-2a \cos t \sin^2 t + \cos^3 t) \cdot 3b \sin^2 t \cos t] \times \frac{1}{(-3a \cos^2 t \cos t)^3}.$$

После очевидных упрощений получаем: $y''_{xx} = \frac{b}{3a^2 \cos^4 t \sin t}.$

Тот же результат можно получить короче.

2-й способ: сначала находим по формуле (3.5) первую производ-

ную $y'_x: y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$, затем вторую производную

y''_{xx} , применяя ту же формулу (3.5) к функции $y'(x)$:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_t)'}{x'_t} = \frac{\frac{-ba}{\cos^2 t}}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{b}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

2) Функция $y = f(x)$ задана неявно. Сначала найдем y'_x , дифферен-

цируя это равенство по x : $\frac{y'}{1+y^2} - y' + 3x^2 = 0$, откуда

$$y' = \frac{3x^2(1+y^2)}{y^2} = 3x^2 \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right). \text{ Теперь находим } y'':$$

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = 3 \left(x^2 (y^{-2} + 1) \right)'_x = 3 \left(2x(y^{-2} + 1) + x^2(-2y^{-3})y' \right) = \\ &= 6x \left(\frac{1}{y^2} + 1 - \frac{x}{y^3} y' \right). \text{ Подставляет сюда вместо } y' \text{ ее выражение,} \\ y' &= 3x^2 \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right), \text{ окончательно получаем: } y'' = 6x \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right) \left(1 - \frac{3x^3}{y^3} \right). \end{aligned}$$

Пример 3.22. Найти вторую производную функции, обратной к функции $y = x + x^5$.

Решение. Функция $y(x)$ всюду непрерывна и монотонна, применяем формулу (3.17): $y'_x = 1 + 5x^4$; $y''_{xx} = 20x^3$; $x''_{yy} = -\frac{20x^3}{(1+5x^4)^3}$.

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(x)$ определяются аналогично производным высших порядков, т.е. по определению $d^2y = d(dy)$; $d^3y = d(d^2y)$; ... $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Если x — независимая переменная, то каждый из дифференциалов высшего порядка находится при условии, что dx есть произвольная и независимая от x величина, которую при дифференцировании следует рассматривать как постоянный множитель. В таком случае будем иметь:

$$d^2y = y''dx^2, \quad d^3y = y'''dx^3, \dots, \quad d^n y = y^{(n)}dx^n. \quad (3.19)$$

Выражение dx для дифференциала принято рассматривать как цельный символ, поэтому здесь и далее следует понимать:

$$dx^2 = (dx)^2, dx^3 = (dx)^3, \dots, dx^n = (dx)^n.$$

Если аргумент x сам является функцией, например, $x = x(t)$, то, вообще говоря, $d^n y \neq y^{(n)} dx^n$. Например, второй дифференциал в этом случае будет равен:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'_x dx) = (dy'_x) dx + y'_x d(dx), \text{ т.е.}$$

$$d^2 y = y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x. \quad (3.20)$$

Если для функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют дифференциалы $d^n u$ и $d^n v$, то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β — постоянные, и $u(x) \cdot v(x)$ также имеют дифференциалы n -го порядка, причем

$$d^n (\alpha u + \beta v) = \alpha d^n u + \beta d^n v, \quad (3.21)$$

$$d^n (uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u \cdot d^k v.$$

Пример 3.23. Найти второй дифференциал функции $y = xe^{-x}$, считая x независимой переменной.

Решение. 1-й способ. По определению второго дифференциала

$$\begin{aligned} \text{находим: } d^2 y &= d(dy) = d(xde^{-x} + e^{-x}dx) = d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) = \\ &= -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx = -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}dx^2 = \\ &= xe^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 = (x-2)e^{-x}dx^2. \end{aligned}$$

2-й способ. Находим вторую производную $y'' = (xe^{-x})'' =$

$$= (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x} \text{ и по формуле (3.19)}$$

находим $d^2 y = (x-2)e^{-x} dx^2$.

Пример 3.24. Найти $d^2 y$ функции $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$ при условии, что

а) x – независимая переменная; б) x – функция переменной t .

Решение. Находим последовательно

$$y' = (\ln(1-x^2))' - (\ln(1+x^2))' = \frac{-2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1-x^4},$$

$$y'' = -4 \left(\frac{x}{1-x^4} \right)' = -4 \frac{x' \cdot (1-x^4) - x(1-x^4)'}{(1-x^4)^2} =$$

$$= -4 \frac{1-x^4 - x(-4)x^3}{(1-x^4)^2} = -4 \frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2}. \text{ Тогда для случая а) по формуле}$$

(3.19) получаем: $d^2 y = -4 \frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2} dx^2$; для случая б) по формуле

$$(3.20) \text{ получим: } d^2 y = -4 \frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2} dx^2 - \frac{4x}{1-x^4} d^2 x =$$

$$= -4 \frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2} (x'(t) dt)^2 - \frac{4x}{1-x^4} x''(t) dt^2 =$$

$$= -\frac{4}{(1-x^4)^2} ((1+3x^4)x'^2(t) + x(1-x^4)x''(t)) dt^2.$$

3.6. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a , имеет в этой окрестности непрерывные производные до $(n+1)$ порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \quad (3.22)$$

Многочлен степени n вида

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$. Формулу (3.22)

тогда можно записать в виде $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (3.23)$$

Остаточный член n -го порядка формулы Тейлора, который может быть записан, например, в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (3.24)$$

где ξ — некоторая промежуточная точка между a и x .

Пусть θ — некоторое число между нулем и единицей, $0 < \theta < 1$, тогда можно представить ξ в виде: $\xi = a + \theta(x-a)$, и формула (3.24) примет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad (3.24a)$$

Формула (3.24) выражает остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. При $x \rightarrow a$ остаточный член имеет по крайней мере $(n+1)$ порядок малости по сравнению с $(x-a)$. Это означает, что в малой окрестности точки a имеет место приближенное равенство $f(x) \approx P_n(x)$, причем, исследуя остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора, можно определить точность этой приближенной формулы.

При $a = 0$ получаем формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (3.25)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, при этом число ξ находится между нулем

и x , или $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Для практических задач наиболее важны следующие пять основных разложений по формуле Маклорена:

I.
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\text{II.} \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x);$$

$$R_{2n-1}(x) = \frac{\sin(\xi + 0,5\pi(2n+1))}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$\text{III.} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \quad (3.26)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{\cos(\xi + 0,5\pi(2n+2))}{(2n+2)!} x^{2n+2};$$

$$\text{IV.} \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{(n+1)!} (1+\xi)^{m-n-1} x^{n+1};$$

$$\text{V.} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}.$$

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и, кроме того, имеет в самой точке a производные до порядка n включительно, то имеет место локальная формула Тейлора;

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n), \quad (3.27)$$

где $R_n(x) = o((x-a)^n)$ — остаточный член в форме Пеано. Эта запись означает, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

В частности, при $a = 0$ получаем локальную формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (3.28)$$

Локальная формула Тейлора показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки a ее многочленом Тейлора n -й степени, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x \rightarrow a$ бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Основные разложения

будут иметь следующий вид:

$$\text{I.} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\text{II.} \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\text{III.} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}); \quad (3.29)$$

$$\text{IV.} \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$V. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Разложение функций по формулам Тейлора и Маклорена

Разложить функцию по формулам Тейлора или Маклорена можно либо непосредственно, вычисляя производные, либо используя известные разложения и свойства символа “о-малое”.

Пример 3.25. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до слагаемого, содержащего x^3 включительно.

Решение. Последовательно вычисляя производные, получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{tg} x)'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}; \quad (\operatorname{tg} x)''' = 2 \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos^4 x};$$

отсюда при $x = 0$ получаем:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 2. \text{ Следовательно,}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!} x^3 + R_3(x), \text{ или } \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4).$$

Пример 3.26. Разложить функцию $f(x) = \ln \cos x$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

Решение. Здесь проще использовать разложения III и V. Используя

$$\text{разложение III, получим } \ln \cos x = \ln \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right] = \ln(1+t),$$

$$\text{где } t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4). \text{ Теперь используем разложение V:}$$

$$\ln \cos x = \ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right).$$

После упрощений получим $\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

Пример 3.27. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

Решение. Здесь используем разложения для $\sin x$ и e^x , причем в последнее вместо x подставляем $(-x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]^2 - x^2 \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $a \neq 0$ заменой $x - a = t$ обычно сводят к разложению функции $g(t) = f(a+t)$ по формуле Маклорена.

Пример 3.28. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $a = 2$ функцию $f(x) = \ln(2x - x^2 + 3)$.

Решение. Полагая $x - 2 = t$, получим $x = t + 2$ и $2x - x^2 + 3 = 2(t+2) - (t+2)^2 + 3 = -t^2 - 2t + 3 = (1-t)(3+t) = 3\left[1 + (-t)\right]\left[1 + \frac{t}{3}\right]$. Отсюда следует, что

$$f(x) = g(t) = \ln \left(3 \left[1 + (-t) \right] \left[1 + \frac{t}{3} \right] \right) = \\ = \ln 3 + \ln(1 + (-t)) + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right).$$

Теперь разложим функцию $g(t)$ по формуле Маклорена. Для этого

в основное разложение V подставляем вместо x $(-t)$ и $\frac{t}{3}$:

$$g(t) = \ln 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (-t)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{t}{3} \right)^k}{k} + o(t^n) = \\ = \ln 3 - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k 3^k} + o(t^n) = \ln 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1 \right) \frac{t^k}{k} + o(t^n).$$

Возвращаясь к переменной x ($t = x - 2$), окончательно получаем:

$$f(x) = \ln 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1 \right) \frac{(x-2)^k}{k} + o((x-2)^n).$$

Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора

Формулу Тейлора можно применять к решению следующих задач: вычислить значение функции с заданной точностью; найти все значения x , при которых данная приближенная формула верна с заданной точностью.

Пример 3.29. Вычислить $\cos 9^\circ$ с точностью до 10^{-5} .

Решение. Сначала переведем 9° в радианы с точностью до 10^{-5} :

$$9^\circ = \frac{\pi}{20} \approx 0.15708 \text{ рад}$$

Теперь используем формулу Маклорена для $\cos x$ при $x \approx 0.15708$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x), \text{ где}$$

$$R_{2n}(x) = \frac{\cos(\xi + 0,5\pi(2n+1))}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \xi \in (0; 0.15708).$$

Так как $|\cos x| \leq 1$, то $|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{(0,2)^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Выберем n так,

чтобы выполнялось неравенство $\frac{(0,2)^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq 10^{-5}$. Подставляя сюда

последовательно $n=1$ и $n=2$ получим, что при $n=2$

$$R_4(x) < \frac{(0,2)^6}{6!} < 0,000002 < 10^{-5}. \text{ Следовательно, для получения тре-}$$

буемой точности вычислений, надо взять $n=2$, т.е. необходимо учитывать все слагаемые разложения для $\cos x$ до x^4 включительно, так как первый член разложения имеет номер $n=0$.

$$\text{Таким образом, } \cos 9^\circ \approx 1 - \frac{(0,15708)^2}{2!} + \frac{(0,15708)^4}{4!}.$$

Проведя вычисления и округлив их результат с заданной точностью, получим: $\cos 9^\circ \approx 0,98770$.

Пример 3.30. Оценить погрешность приближенной формулы

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \text{ при } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. По формуле Маклорена для $\ln(1+x)$ (разложение V)

искомая погрешность $|R_5(x)| = \left| -\frac{x^6}{6 \cdot (1+\xi)^6} \right|$. Здесь число ξ лежит

между 0 и x . Так как $|x| \leq \frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, то $-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}$. Оценим

дробь $\frac{1}{1+\xi}$. При $-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}$ знаменатель этой дроби имеет наи-

меньшее значение $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Поскольку наименьшему значению

знаменателя соответствует наибольшее значение дроби, то

$\frac{1}{1+\xi} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Кроме того, по условию $|x| \leq \frac{1}{2}$. Следовательно, иско-

мая погрешность не превышает $\frac{1}{6}$:

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{6} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} \right]^6 \cdot (0,5)^6 = \frac{1}{6} \approx 0,166...$$

Пример 3.31. При каких значениях x приближенная формула

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ верна с точностью до 0,000001.

Решение. По основному разложению II погрешность равна (здесь

$n=2$) $R_3(x) = \frac{\sin(\xi + 2,5\pi)}{5!} x^5$. Так как $|\sin(\xi + 2,5\pi)| \leq 1$, то

$|R_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!}$. Поскольку по условию задачи, $|R_3(x)| < 10^{-6}$, то относи-

тельно x получаем неравенство $\frac{|x|^3}{3!} < 0,000001$, откуда $|x|^3 < 0,00012$,

$|x| < 0,1 \cdot \sqrt[3]{12} \approx 0,165$. Таким образом, данная формула верна с точностью до 10^{-6} , если $|x| < 0,165$, т.е. для $-0,165 < x < 0,165$.

Пример 3.32. Сколько нужно взять членов в формуле Маклорена для функции $f(x) = e^x$, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию на отрезке $[-1; 1]$, с точностью до 0,001.

Решение. В разложении для e^x остаточный член

$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$. Найдем, для каких n будет выполняться нера-

венство $|R_n(x)| < 0,001$. Для этого оценим величину $|R_n(x)|$. С учетом того, что $|x| \leq 1$ и неравенства $0 < \xi < 1$, получим: $|x|^{n+1} \leq 1$,

$e^\xi < e^1 = e$ поэтому $|R_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Найдем теперь наименьшее n ,

при котором будет выполняться неравенство $\frac{e}{(n+1)!} < 0,001$.

Поскольку $e \approx 2,718$, то $(n+1)! > \frac{e}{0,001} \approx 2718$. При $n+1=6$ нера-

венство не выполняется, так как $6! = 720$ при $n+1=7$ получаем $7! = 720 \cdot 7 = 5040 > 2718$. Таким образом, $n+1=7$, т.е. $n=6$. Итак, для получения заданной точности в разложении для e^x необходимо

взять 7 слагаемых, так как первый член разложения имеет номер

$$n=0, \text{ т.е. } e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^6}{6!}.$$

Нахождение пределов с помощью формулы Тейлора

Пусть требуется найти $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(a) = g(a) = 0$,

т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае предел

может быть найден путем разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Заменив функции $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки a ее многочленом Тейлора n -й степени, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x \rightarrow a$ бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Пример 3.33. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}$;

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{2x^2}; \quad 3) L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x(1+x)^a}{x^2};$$

$$4) L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}; \quad 5) L_5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}.$$

Решение. 1) По формуле Тейлора $\sin(2x-2) = \sin 2(x-1) =$

$$= \frac{2(x-1)}{1!} + o(x-1), \quad \sin(3x-3) = \frac{3(x-1)}{1!} + o(x-1), \quad \text{следовательно}$$

$$\text{но, } L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - 2(x-1) + o(x-1)}{(x-1) + 3(x-1) + o(x-1)}. \quad \text{Отбрасывая бесконечно малые}$$

высших порядков, т.е. переходя в числителе к эквивалентным бес-

$$\text{конечно малым при } x \rightarrow 1, \text{ получаем } L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{4(x-1)} = -\frac{1}{4}.$$

2) По формуле Маклорена (основное разложение IV при $m = \frac{1}{2}$) по-

$$\text{лучим: } \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + o(x^2);$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x)^2 + o(x^2), \quad \text{откуда}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) + 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(-x)^2 + o(x^2) - 2 = \\ &= -\frac{x^2}{4} + o(x^2). \quad \text{С учетом этого } L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{2x^2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3) Используя основные разложения IV и V, получим

$$\begin{aligned} L_3 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x(1 + \alpha x + o(x))}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

4) Используя основные разложения III и IV, и эквивалентность $\operatorname{tg} x \sim x$ получим:

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^4 + o(x^4) \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)}{x^4}.$$

Раскрыв скобки в числителе и сохраняя слагаемые до 4-го порядка малости относительно x , получим:

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

5) Так как $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ — по таблице; $\arcsin x =$

$x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ — непосредственно по формуле Маклорена (3.27), то

разложение знаменателя дроби по формуле Маклорена имеет вид:

$\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Поэтому числитель дроби следует раз-

ложить по формуле Маклорена до $o(x^3)$. Используя формулы

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3), \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ получим:}$$

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} = 1 + \frac{1}{2}2\operatorname{tg} x - \frac{1}{8}(2\operatorname{tg} x)^2 + \frac{1}{16}(2\operatorname{tg} x)^3 + o(\operatorname{tg}^3 x) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

Учитывая, что $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, находим разложение по формуле Маклорена числителя дроби:

$$\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Следовательно,
$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 2.$$

3.7. Правило Лопиталья

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ а) дифференцируемы в окрестности точки a , за исключением, может быть, самой точки a , причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности; б) $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \rightarrow a$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (3.30)$$

если последний предел существует или обращается в бесконечность.

Правило Лопиталья остается в силе, если $a = \infty$. Правило Лопиталья часто применяется для раскрытия неопределенностей $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, поскольку во многих случаях предел отношения производных находится проще, чем предел отношения функций.

Пример 3.34. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}; \quad 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln x}.$$

Решение. В первом случае имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, во втором

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя.

1)

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 3x}{\sin 3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

В некоторых случаях правило Лопиталя необходимо применять несколько раз.

Пример 3.35. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^3 - 5x + 4}; \quad 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}.$$

Решение.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} = \left(\frac{0}{0}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x^4 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^9 - 1)'}{(x^4 - 1)'} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^8}{4x^3} = \frac{9}{2}.$$

2)

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\cos x} = 6.$$

Применяя правило Лопиталья, часто бывает удобно предварительно использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых.

Пример 3.36. Найти пределы.

$$1) L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}; \quad 2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x}.$$

Решение. 1) Используя эквивалентность $\sin x \sim x$ и правило Лопиталья, получим:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}.$$

2) Здесь используем сначала эквивалентности $\operatorname{arctg} x \sim x$,

$$\ln(1+x) \sim x.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } L_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x}{\operatorname{tg} x - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 3. \end{aligned}$$

Раскрытие неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$

Если $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, то при нахождении предела $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$ (неопределенность $(0 \cdot \infty)$), правило Лопи-

тая непосредственно не применимо. В этом случае тождествен-

$$\text{ным преобразованием } f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ или } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, к которым уже применимо правило Лопиталья. На практике осуществляем то преобразование, которое приводит к более простым выкладкам – более сложную функцию из пары $f(x)$ и $g(x)$ оставляем в числителе.

Пример 3.37. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$;

2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \operatorname{ctg} x$; 3) $L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}$.

Решение. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)'}{(\operatorname{ctg} x)'}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin^2 x} = -1.$$

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \operatorname{ctg} x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 0.$$

3) В этой задаче для упрощения выкладок сделаем сначала замену: $\sqrt{x} = z \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда $L_1 = \lim_{z \rightarrow +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} z) \cdot z =$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} z}{\frac{1}{z}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(\pi - 2\operatorname{arctg} z)'}{\left(\frac{1}{z} \right)'} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{1+z^2}}{-\frac{1}{z^2}} =$$

$$= 2 \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^2}{1+z^2} = 2.$$

Раскрытие неопределенностей вида $(\infty - \infty)$

Если $f(x) \rightarrow \infty$ и $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, то нахождение предела $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ (неопределенность вида $(\infty - \infty)$) может быть сведено к раскрытию неопределенностей $\left(\frac{0}{0} \right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ или $(0 \cdot \infty)$ различными тождественными преобразованиями, например:

$$f(x) - g(x) = f(x) \cdot g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \text{ или}$$

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right], \quad f(x) - g(x) = g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right].$$

При этом, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$, то $L = \infty$;

если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то имеем неопределенность $(0 \cdot \infty)$,

рассмотренную выше.

Пример 3.38. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$;

2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$; 3) $L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^2 x)$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1) L_1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x + x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x}$, получили неопределенность $\left(\frac{0}{0} \right)$, можно

применить правило Лопиталья. Для упрощения выкладок используем эквивалентность $\sin x \sim x$ в знаменателе, тогда

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)'}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \sin 2x)'}{(4x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}.$$

$$3) L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln^2 x}{x} \right). \text{ Так как } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \neq 1, \text{ то } L_3 = +\infty.$$

Раскрытие неопределенностей вида (0^0) , (∞^0) , (1^∞)

Пусть требуется найти $L = \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)}$ и при этом требуется раскрыть степенные неопределенности (например, если $u(x) \rightarrow 0$, $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то имеем неопределенность (0^0)). Нахождение L в этих случаях можно свести к раскрытию неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$ при помощи следующего преобразования:

$$[u(x)]^{v(x)} = e^{\ln[u(x)]^{v(x)}} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}.$$

Тогда в силу непрерывности показательной функции

$$L = \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(x) \cdot \ln u(x)} \quad (3.31)$$

Пример 3.39. Найти пределы. 1) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$;

$$2) L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}; 3) L_3 = \lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

Решение. Во всех 4-х случаях используем формулы (3.30) и (3.31).

$$1) L_1 = e^l, \text{ где } l = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = 1 \cdot \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2 \sin x \cos x} = -\frac{1}{2}, L_1 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$2) L_2 = e^l, \text{ где } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\ln 2x) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln 2x))'}{(\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \ln 2x} = 0, L_2 = e^0 = 1.$$

$$3) L_3 = e^l, \text{ где } l = \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\arcsin x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln(\arcsin x))'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{\arcsin x} = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{\arcsin x}.$$

Здесь можно повторно использовать правило Лопиталя, однако, проще использовать эквивалентности: $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$ при

$x \rightarrow 0$. Тогда $L_2 = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{x} = 0$, $L_3 = e^0 = 1$.

3.8. Исследование функций и построение графиков

3.8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Под исследованием функции $y = f(x)$ понимается изучение ее изменения в зависимости от изменения аргумента. Знание производных функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции. Исследование функций с помощью производных опирается на следующие четыре теоремы, которые называются основными теоремами дифференциального исчисления. Они имеют многообразные применения в математическом анализе.

Теорема Ферма

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает наибольшее или наименьшее значение в некоторой его внутренней точке ξ , $\xi \in (a, b)$. Если существует конечная производная $f'(\xi)$ в этой точке, то $f'(\xi) = 0$.

Теорема Ролля

Пусть функция $y = f(x)$: 1) определена и непрерывна на $[a, b]$, 2) существует конечная производная $f'(x)$ по крайней мере на (a, b) , 3) на концах отрезка функция принимает равные значения:

$f(a) = f(b)$. Тогда найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.

Пример 3.40. а) Удовлетворяет ли функция $f(x) = 3x^2 - 1$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[1, 2]$?

Решение. Заданная функция не удовлетворяет условию теоремы Ферма, так как она монотонно возрастает на отрезке $[1, 2]$: $y(x_2) - y(x_1) = 3x_2^2 - 3x_1^2 = 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$, поэтому для любых x_1 и x_2 принадлежащих отрезку $[1, 2]$, из условия $x_2 > x_1$ следует, что $y(x_2) > y(x_1)$. Следовательно, наименьшее значение функция принимает при $x = 1$, а наибольшее – при $x = 2$, а не во внутренних точках отрезка $[1, 2]$, т.е. не удовлетворяет условиям теоремы Ферма. Поэтому теорема Ферма к данной функции на данном отрезке не применима. Действительно, производная $f'(x) = 3x \neq 0$ на $(1, 2)$.

б) Удовлетворяет ли функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$?

Решение. Функция непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, кроме того, $f(-1) = f(1) = 0$. Значит, два условия теоремы Ролля выполнены.

Производная $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ существует во всех точках, кроме точки

$x = 0$. Так как эта точка внутренняя для отрезка $[-1, 1]$, то третье условие теоремы Ролля не выполнено. Поэтому теорема Ролля к

данной функции на данном отрезке не применима. И действительно, $f'(x) \neq 0$ на $(-1, 1)$.

Теорема Лагранжа

Пусть функция $f(x)$: 1) определена и непрерывна на $[a, b]$, 2) существует конечная производная $f'(x)$ по крайней мере на (a, b) . Тогда найдется хотя бы одна такая точка $\xi \in (a, b)$, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad (3.32)$$

или
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (3.33)$$

Формула (3.33) называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*. Запишем ее в несколько другом, часто используемом виде. Возьмем какое либо $x_0 \in (a, b)$ и придадим ему приращение $\Delta x > 0$ ($\Delta x < 0$) такое, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Применим формулу Лагранжа к промежутку $[x_0, x_0 + \Delta x]$ при $\Delta x > 0$ или к промежутку $[x_0 + \Delta x, x_0]$ при $\Delta x < 0$. Число ξ , заключенное в этом случае между x_0 и $x_0 + \Delta x$, можно представить так: $\xi = x_0 + \theta \Delta x$, где $0 < \theta < 1$.

Тогда формула Лагранжа примет вид:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (3.34)$$

Пример 3.41. Удовлетворяет ли функция $f(x) = 3x^2 - 5$ условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[-2; 0]$? Если да, то найти фигурирующую в формуле $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ точку ξ .

Решение. Функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так как она непрерывна на отрезке $[-2; 0]$ и имеет конечную производную $f'(x) = 6x$ на этом отрезке. Точку ξ найдем из формулы Лагранжа:
$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 7}{2} = -6, \quad 6\xi = -6, \quad \xi = -1.$$

Если вспомнить, что производная $f'(\xi)$ численно равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = \xi$, то утверждения всех трех теорем, при сформулированных в них условиях, на геометрическом языке становятся очевидными:

Т. Ферма: если в точке $x = \xi$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, то она параллельна оси OX .

Т. Ролля: если крайние ординаты $f(a)$ и $f(b)$ кривой $y = f(x)$ равны, то на этой кривой существует хотя бы одна точка $(\xi; f(\xi))$, в которой касательная параллельна оси OX .

Т. Лагранжа: на кривой $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка $(\xi; f(\xi))$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей крайние точки кривой $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.

Теорема Коши

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$: 1) непрерывны на $[a, b]$, 2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ по

крайней мере на (a, b) , 3) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда найдется хотя бы одна такая точка $\xi \in (a, b)$, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (3.35)$$

Эта формула носит название *формулы Коши*.

Пример 3.42. Проверить, что функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1; 4]$ и найти соответствующее значение ξ .

Решение. Данные функции непрерывны на отрезке $[1; 4]$; их производные $f'(x) = 2x - 2$ и $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ конечны везде; кроме того, $g'(x)$ не обращается в нуль на при каких x (дискриминант $D = 14^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 < 0$). Таким образом, теорема Коши к данным функциям на отрезке $[1; 4]$ применима: $\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, т.е.

$\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2\xi - 2}{3\xi^2 - 14\xi + 20}$, $1 < \xi < 4$. Решая последнее уравнение, находим два значения ξ : $\xi_1 = 2$ и $\xi_2 = 4$. С учетом условия $1 < \xi < 4$, окончательно имеем $\xi = 2$.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши (когда $g(x) = x$), а теорема Ролля – частным случаем теоремы Лагранжа (когда $f(b) = f(a)$).

3.8.2. Теоретические основы исследования функций и построения графиков

Исследование функции с последующим построением ее графика проводится по следующему алгоритму:

1. Найти область определения функции, исследовать ее на четность и периодичность, найти точки пересечения с осями координат.
2. Найти асимптоты графика функции или установить, что их не существует.
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума.
4. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

После этого выбираем масштаб и начало системы координат таким образом, чтобы все характерные точки, по которым строится график функции – точки пересечения с осями координат, точки экстремума и точки перегиба – оказались в поле чертежа. Наносим асимптоты, характерные точки и строим график.

Заметим, что целесообразнее построить сначала предварительный эскиз графика функции на основании пунктов 1 – 3 исследования, а потом – окончательный чертеж с учетом дополнений, внесенных исследованием по пункту 4.

Если рассматриваемая функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при положительных значениях аргумента и принять во внимание, что график четной функции симметричен от-

носителем оси ординат OY , а график нечетной функции – относительно начала координат.

Если функция периодическая, то достаточно исследовать ее и построить график на любом промежутке, длина которого равна периоду (как правило, на ближайшем к началу координат).

Обратимся теперь к определениям и теоремам, на основании которых проводится исследование функций.

Асимптоты графика функции

Определение. Прямая (l) называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от произвольной точки M на графике до этой прямой стремится к нулю, когда $|OM| \rightarrow \infty$, т.е. точка M неограниченно удаляется от начала координат. Если асимптота перпендикулярна оси OX , то ее называют *вертикальной*, в противном случае – *наклонной* или *горизонтальной*, если она параллельна оси OX .

Наличие или отсутствие асимптот у графика функции определяется следующими двумя теоремами.

Теорема 1. Для того чтобы прямая $x = a$ являлась вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы обращался в бесконечность хотя бы один из односторонних пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty. \quad (3.36)$$

Таким образом, вертикальные асимптоты графика функции $y = f(x)$ следует искать в тех точках $x = a$ числовой прямой, где функция не определена.

Теорема 2. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ являлась наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (3.37)$$

Если эти пределы существуют только при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$), то асимптота будет *правосторонней* (или *левосторонней*); если $k = 0$, то асимптота будет горизонтальной.

Промежутки монотонности и точки экстремума

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее δ - окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Назовем x_0 точкой *максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, или $\Delta y = f(x) - f(x_0) < 0$ ($f(x) > f(x_0)$, или $\Delta y > 0$).

Точки максимума и минимума функции называются точками **■** *локального экстремума*, или просто точками экстремума.

Теорема 1. Достаточное условие монотонности функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную по крайней мере на интервале (a, b) . Если $f'(x) \geq 0$ (или $f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает (или убывает) на $[a, b]$.

Теорема 2. Необходимое условие экстремума.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет экстремум (максимум или минимум) в некоторой точке $x = c$. Тогда, если в этой точке существует конечная производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Замечания.

1. В точке экстремума двусторонняя конечная производная $f'(c)$ может и не существовать (т.е. $f'(c-0)$ и $f'(c+0)$ существуют, но $f'(c-0) \neq f'(c+0)$) или она может обращаться в бесконечность.
2. Условия а) $f'(c) = 0$ или б) $f'(c)$ не существует не гарантируют наличие экстремума в точке $x = c$, т.е. не являются достаточными условиями экстремума.

Приведем пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$; ее производная $f'(x) = 3x^2 = 0$, если $x = 0$. Исследуем знак приращения функции в этой точке: $\Delta f(0) = x^3 - 0^3 = x^3 > 0$ при $x > 0$ и $\Delta f(0) < 0$ при $x < 0$.

т.е. приращение функции в этой точке не сохраняет знак, поэтому при $x=0$ функция $f(x)=x^3$ не имеет ни максимума ни минимума.

3. Точки $x_i = c_i$, в которых выполняется одно из условий $f'(c_i) = 0$ или $f'(c_i)$ не существует, например, обращается в бесконечность называются *критическими точками*, или *точками возможного экстремума* функции $y = f(x)$.

Теорема 3. Достаточное условие экстремума по первой производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в некоторой окрестности $(c - \delta, c + \delta)$ критической точки $x = c$, исключая, может быть, саму эту точку. Причем в этой окрестности слева и справа от критической точки $x = c$ производная $f'(x)$ сохраняет определенный знак.

Тогда, если для точек x из этой окрестности

- 1) производная $f'(x) > 0$ при $x < c$ и $f'(x) < 0$ при $x > c$ (т.е. производная $f'(x)$ “при переходе через точку $x = c$ слева направо” меняет знак с плюса на минус), то $x = c$ — точка максимума функции $f(x)$;
- 2) производная $f'(x) < 0$ при $x < c$ и $f'(x) > 0$ при $x > c$ (т.е. производная меняет знак с минуса на плюс “при переходе слева на-

право" через критическую точку), то $x = c$ — точка минимума функции $f(x)$;

- 3) производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку $x = c$, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Теорема 4. *Достаточное условие экстремума по второй производной*

Пусть функция $y = f(x)$ не только имеет конечную производную $f'(x)$ для всех x из окрестности $(c - \delta, c + \delta)$ точки $x = c$, в которой $f'(c) = 0$, но и вторую производную $f''(c)$ в самой критической точке. Тогда, если:

- 1) $f''(c) < 0$, то $x = c$ — точка максимума функции $f(x)$;
- 2) $f''(c) > 0$, то $x = c$ — точка минимума функции $f(x)$;
- 3) $f''(c) = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума в точке $x = c$ остается открытым.

Очевидно, теорема 4 имеет более узкий круг применения, чем теорема 3, так как она не приложима к исследованию тех критических точек, в которых не существует конечная первая производная $f'(x)$ или вторая производная $f''(x)$, и не дает ответа на поставленный вопрос в том случае, когда вторая производная $f''(x)$ обращается в ноль в критической точке.

Промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$. В этом случае кривая $y = f(x)$ называется *гладкой* на этом промежутке.

Замечание. Определение остается в силе, если хотя бы одна из производных функции на концах отрезка — $f'(a+0)$ или $f'(b-0)$ — обращается в бесконечность.

Определение 2. Гладкая на $[a, b]$ кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (или *вогнутой*) на этом промежутке, если все точки кривой лежат выше (или ниже) любой ее касательной на этом промежутке или на ней. Выпуклую кривую называют также *выпуклой вниз*, а вогнутую — *выпуклой вверх*.

Определение 3. Точка $(c; f(c))$ на графике функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклый участок кривой от вогнутого, называется *точкой перегиба* графика функции.

Очевидно, что если в точке перегиба графика функции существует касательная, то кривая “переходит” в этой точке с одной стороны касательной на другую.

Теорема 1. *Условие выпуклости (или вогнутости) графика функции.*

Пусть график функции $y = f(x)$ — гладкая кривая на отрезке $[a, b]$ и существует конечная вторая производная $f''(x)$ по крайней

мере на интервале (a, b) . Для того чтобы кривая $y = f(x)$ являлась выпуклой (или вогнутой) на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) > 0$ (или $f''(x) < 0$) для всех $x \in (a, b)$.

Теорема 2. Необходимое условие перегиба.

Пусть график функции $y = f(x)$ – гладкая кривая на $[a, b]$ и $(c; f(c))$ где $c \in (a, b)$ – точка перегиба графика функции. Тогда, если в этой точке существует конечная вторая производная $f''(c)$, то $f''(c) = 0$.

Замечания.

- 1) В точке перегиба двусторонняя конечная вторая производная $f''(c)$, как и первая производная $f'(c)$, может и не существовать (т.е. $f''(c-0)$ и $f''(c+0)$ существуют, но $f''(c-0) \neq f''(c+0)$) или обращаться в бесконечность.
- 2) Условия а) $f''(c) = 0$ или б) $f''(c)$ не существует не являются достаточными для существования перегиба в точке $(c; f(c))$ графика функции $f(x)$.

Приведем пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4$; ее вторая производная $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$, но во всех точках $x \neq 0$ положительна, и поэтому кривая $y = x^4$ выпуклая на всей числовой прямой.

Точки $x_i = c_i$, в которых выполняется одно из условий $f''(c_i) = 0$ или $f''(c)$ не существует (например, обращается в бесконечность) называются *критическими точками второго рода* или *точками возможного перегиба* графика функции $y = f(x)$.

Теорема 3. Достаточное условие перегиба.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности $(c - \delta, c + \delta)$ критической точки второго рода $x = c$, исключая, быть может, саму эту точку. Причем, в этой окрестности слева и справа от точки $x = c$ производная $f''(x)$ сохраняет определенный знак. Тогда, если при переходе через точку $x = c$ производная $f''(x)$ меняет знак, то $(c; f(c))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$. В противном случае в этой точке у графика функции нет перегиба.

Анализируя определения и теоремы 1 – 3 этого пункта, нетрудно усмотреть, что точки перегиба графика функции $y = f(x)$, являются точками экстремума ее производной $f'(x)$.

3.8.3. Примеры на исследование функций и построение графиков

Пример 3.43. $y = \frac{1}{4}(x-1)^3(3x+2)^2$ – исследовать на экстремум и построить график.

Решение. 1. О.О. $x \in R$. Точки пересечения с осями координат, очевидно, $(1; 0)$, $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, $(0; -1)$

Функция непериодическая, свойствами четности или нечетности не обладает^{*)}:

$$y(-x) = \frac{1}{4}(-x-1)^2(-3x+2)^2 \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases} \forall x.$$

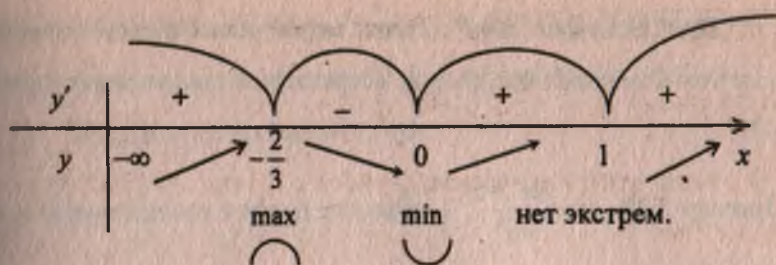
2. Асимптот график функции не имеет. Вертикальных – потому что $D(y) = R$, наклонных – потому что если $|x|$ много больше 1, то $y \approx \frac{1}{4}x^3(3x)^2 \neq kx + b$ ни при каких k и b .

$$\begin{aligned} 3. y' &= \frac{1}{4} \left(3(x-1)^2(3x+2)^2 + (x-1)^3 \cdot 2 \cdot (3x+2) \cdot 3 \right) = \\ &= \frac{3}{4} (x-1)^2 (3x+2) (3x+2+2x-2) = \frac{15}{4} (x-1)^2 (3x+2) \cdot x. \end{aligned}$$

3. Находим критические точки: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Применяя метод интервалов, расставляем знаки производной в интервалах между критическими точками и отмечаем промежутки монотонности функции:

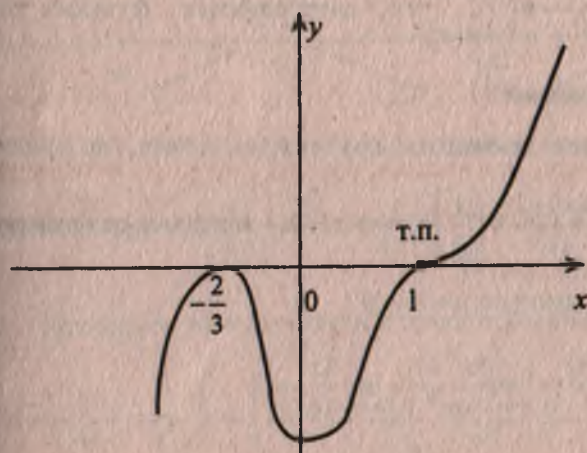
^{*)} Это также видно из координат точек пересечения графика с осью ОХ. Объясните, почему.



Вычисляем: $y_{\max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$, $y_{\min} = y(0) = -1$, $y(1) = 0$.

Точка с координатами $(1; 0)$ является точкой перегиба графика функции (объясните, почему).

Строим систему координат, выбираем масштаб так, чтобы все характерные точки оказались в поле чертежа. Наносим характерные точки и, используя нарисованную выше схему, строим график.



При решении двух других задач остановимся подробно лишь на тех моментах, которые не встретились при решении примера 3.43.

Пример 3.44. $y = \frac{8x^3 + 1}{4x^2}$ – провести полное исследование и построить график.

Решение. 1.О.О.: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. С осью OY график, таким образом, не пересекается. Находим точки его пересечения с осью OX : $y = 0 \Rightarrow 8x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Итак, график проходит через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Исследуем на четность или нечетность:

$$y(-x) = \frac{-8x^3 + 1}{4x^2} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases} \forall x, \text{ следовательно, функция общего}$$

вида. Непериодическая.

2. Вертикальные асимптоты ищутся в тех точках, где функция не

определена: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3 + 1}{4x^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty \Rightarrow x = 0$ – вертикальная асимптота.

Наклонная асимптота $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 1}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3}{4x^3} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x^3 + 1}{4x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x^3} = 0$$

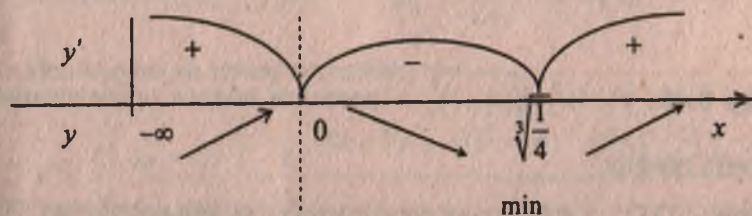
Следовательно, прямая $y = 2x$ — наклонная асимптота, при-
том двусторонняя, т.к. пределы k и b не зависят от знака x .

3. Находим критические точки:

$$y' = \frac{1}{4} \left(8x + \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{4} \left(8 - \frac{2}{x^3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3 - 1}{x^3}; y' = 0 \Rightarrow$$

$$4x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.6. \text{ Производная } y' \text{ не существует при } x = 0,$$

но эта точка не является критической, так как не входит в область определения функции. Рисуем схему для проверки достаточных условий экстремума (точка $x = 0$ должна быть обязательно отмечена, т.к. “при переходе” через нее поведение функции может измениться).

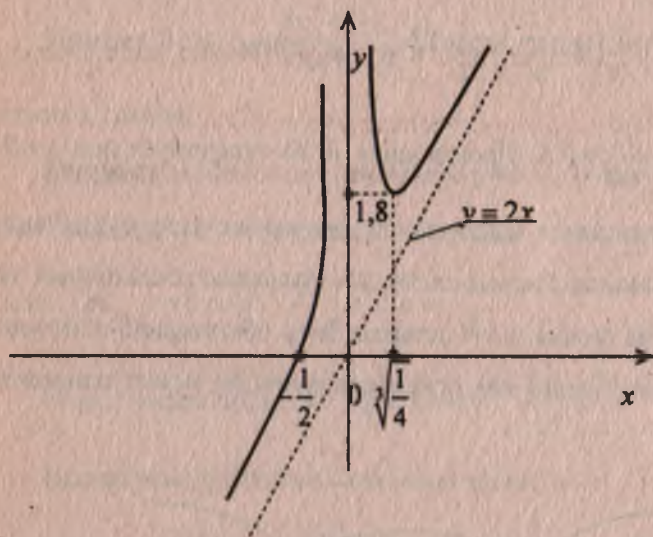


Вычисляем: $y_{\min} = y \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right) = \left(2x + \frac{1}{4x^2} \right) \Big|_{x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \approx 2 \cdot 0.6 + \frac{1}{4} \cdot 2.52 \approx 1.8.$

4. Исследуем на выпуклость и точки перегиба

$$y'' = \left(\frac{1}{4} \left(8 - \frac{2}{x^3} \right) \right)' = \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot (-3) x^{-4} = \frac{3}{2x^4} > 0.$$

Следовательно, кривая выпуклая на всей области определения. При построении графика сначала строим асимптоты, потом характерные точки и, руководствуясь схемой, — график.



Пример 3.45. $y = 4x^2 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$ — провести полное исследование и построить график.

Решение. 1.О.О.: $x \in \mathbb{R}$; точки пересечения с осями координат: $(0;0)$, $(1;0)$; функция неперiodическая, не обладает свойствами четности или нечетности.

2. Вертикальных асимптот нет, т.к. функция определена на всей числовой прямой. Наклонных асимптот также нет, т. к.

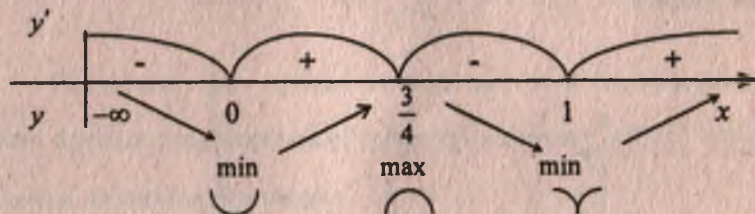
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} = \infty.$$

3. Исследуем на экстремум

$$y' = 4 \left(2x \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}} + x^2 \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{-\frac{1}{3}} \right) = 4 \frac{6x(x-1) + 2x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)}} = \frac{8x(4x-3)}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Находим критические точки: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$, y' не существует при $x = 1$, а именно $\lim_{x \rightarrow 1} y' = \infty$, следовательно, касательная к графику функции в этой точке параллельна оси ОУ.

Проверяем выполнение достаточных условий экстремума.



Вычисляем $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.9$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

4. Исследуем на точки перегиба

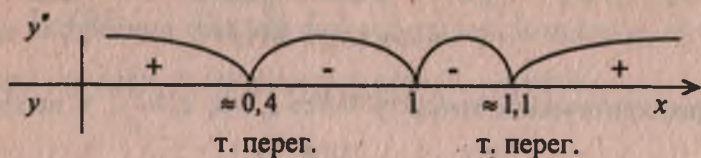
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{8}{3} \left(\frac{4x^2 - 3x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \right)' = \frac{8}{3} \cdot \frac{(8x-3)(x-1)^{\frac{1}{3}} - (4x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-1)^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \\ &= \frac{8}{9} \cdot \frac{3(8x-3)(x-1) - (4x^2 - 3x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{20x^2 - 30x + 9}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}. \end{aligned}$$

Находим критические точки второго рода

$$y'' = 0 \Rightarrow 20x^2 - 30x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{20} \approx \{0.4; 1.1\}$$

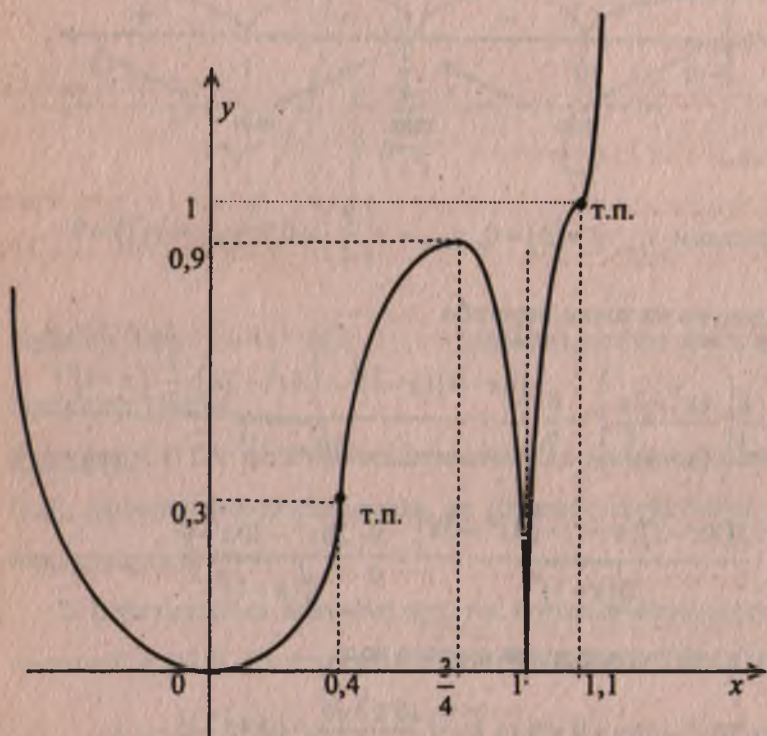
$$y'' = \infty \text{ при } x = 1.$$

Проверяем выполнение достаточных условий перегиба:



Вычисляем $y_{\text{т. перг.}} \approx y(0.4) \approx 0.3$, $y_{\text{т. перг.}} \approx y(1.1) \approx 1.0$.

Строим график.



Пример 3.46. $y = x \ln x$ – провести полное исследование и построить график функции.

Решение. 1. 1.О.О.: $x \in (0, +\infty)$, поэтому функция не может быть

четной или нечетной; $(1; 0)$ – точка пересечения с осью OX , с осью OY , график не пересекается; функция не периодическая.

2. Исследуем поведение функции на границе области определения, т.е. в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +0} -x = 0.$$

Поскольку этот предел не обращается в бесконечность, то график функции вертикальных асимптот не имеет; $(0; 0)$ – предельная точка на графике функции.

Ищем наклонную асимптоту, которая в данном случае может быть только правосторонней, поскольку функция определена при

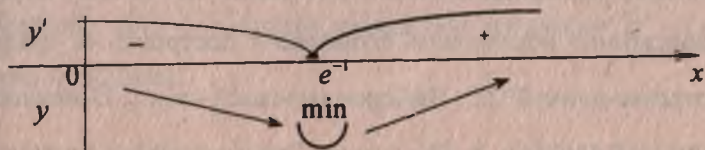
$$x > 0: k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ и, следовательно, наклонной}$$

асимптоты также нет.

3. Исследуем на монотонность и экстремум: $y' = \ln x + 1$;

$$y' = 0 \Rightarrow x = e^{-1} \approx 0,4 - \text{критическая точка.}$$

Проверяем выполнение достаточных условий экстремума:

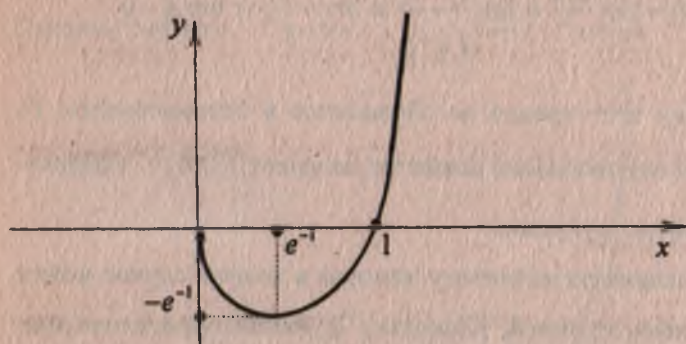


$$\text{Вычисляем } y_{\min} = y(e^{-1}) = -e^{-1} \approx -0,4.$$

4. Исследуем на выпуклость – вогнутость и точки перегиба:

$y'' = \frac{1}{x} > 0$ на всей области определения, таким образом, график функции – выпуклая кривая.

Строим график.



Пример 3.47. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$.

Решение. 1. 1.О.О.: $x \in \mathbb{R}$. Функция периодическая, период равен 2π : период функции $\cos x$ равен 2π , функции $\sin 2x$ – π , поэтому период функции, равной их сумме, будет равен 2π . В силу периодичности достаточно исследовать функцию и построить ее график на любом отрезке длиной 2π . Выберем отрезок $[-\pi; \pi]$. Вычисляем значения функции на концах отрезка: $y(\pm\pi) = -1$.

Функция не является четной или нечетной. Действитель-

$$\text{но: } y(-x) = \frac{1}{2} \sin(-2x) + \cos(-x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \neq \begin{cases} y(x) \\ y(-x) \end{cases} \forall x.$$

График, очевидно, проходит через точку $(0;1)$. Найдем точки пересечения графика с осью OX , принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x = 0 \Rightarrow (\sin x + 1) \cos x = 0, \quad \text{откуда} \quad 1)$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}; \quad \text{среди этих точек указанному}$$

$$\text{промежутку принадлежат } x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ и } x_2 = -\frac{\pi}{2}; \text{ или}$$

2) $\sin x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$ и потому корни уравнения $\sin x = -1$ находятся среди корней уравнения $\cos x = 0$.

Итак, $(0;1)$, $\left(\pm \frac{\pi}{2}; 0\right)$ – точки пересечения графика функции с осями координат.

3. Исследуем на монотонность и экстремум:

$$y' = \cos 2x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x. \quad \text{Находим критические точки.}$$

Обозначая $\sin x = t$ и решая квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$, получим его корни:

$$1) \quad t_1 = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и, отбирая решения,}$$

принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$, получим критическую точку $x_1 = -\frac{\pi}{2}$;

$$2) \quad t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_k = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{6}, x_3 = \frac{5\pi}{6} -$$

принадлежат $[-\pi; \pi]$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума по второй производной: $y'' = -2\sin 2x - \cos x$. Вычисляем значение второй производной в критических точках:

$$1) \quad y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0, \text{ поэтому } x_2 = \frac{\pi}{6} - \text{точка}$$

максимума функции, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,3$;

$$2) \quad y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0, \text{ поэтому } x_3 = \frac{5\pi}{6} - \text{точка минимума}$$

функции, $y_{\min} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx -1,3$;

$$3) \quad y''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ поэтому исследуем точку } x = -\frac{\pi}{2} \text{ по первой}$$

производной: вычислим значения первой производной в точках

$$x = -\frac{3\pi}{4} \left(-\pi < -\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2} \right) \text{ и } x = 0 \left(-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{6} \right):$$

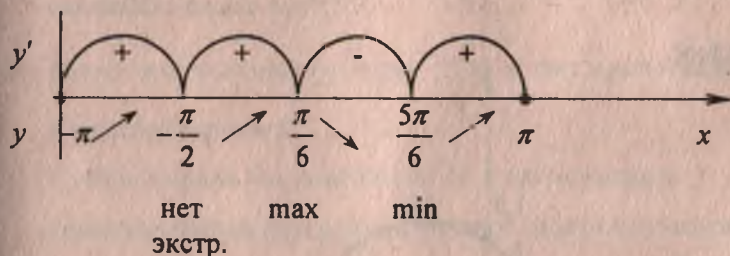
$$y'\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0,$$

$y'(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1 > 0$, и так как производная не меняет знак

при переходе через критическую точку $x = -\frac{\pi}{2}$, то в этой точке

функция экстремума не имеет (точка $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ будет точкой перегиба графика функции).

Рисуем схему:



4. Исследуем на выпуклость и вогнутость и точки перегиба:

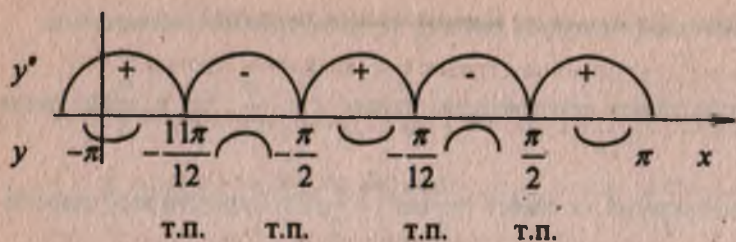
$$y'' = -2 \sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (4 \sin x + 1) = 0, \text{ откуда находим}$$

критические точки, принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$:

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ или}$$

$$2) \sin x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_3 = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -\frac{\pi}{12}, x_4 = -\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \approx -\frac{11\pi}{12}.$$

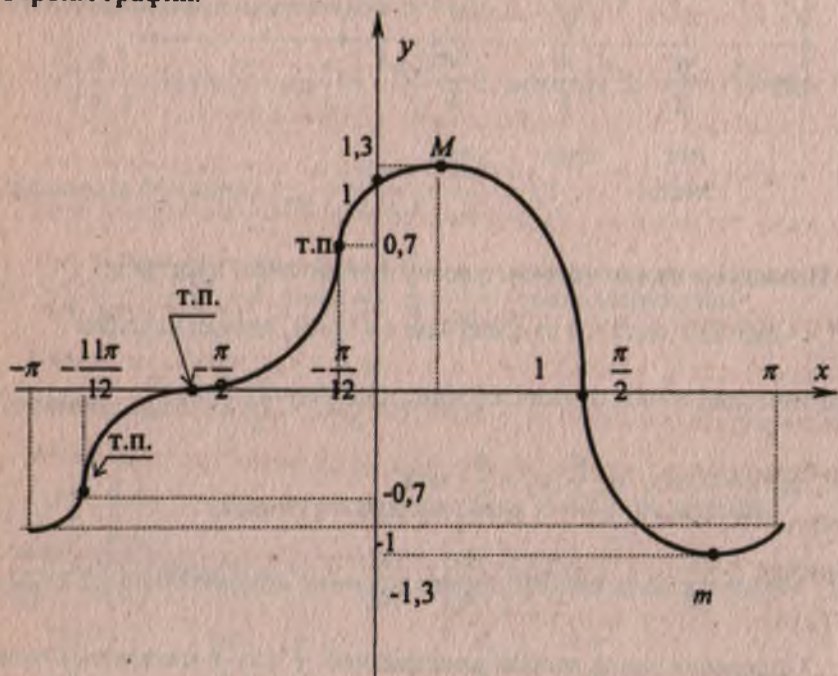
Определяя знаки второй производной $f''(x)$ в интервалах между критическими точками, находим промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции:



Вычисляем значения функции в точках перегиба:

$$y\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad y\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\approx 0,7, \quad y\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\approx -0,7.$$

Строим график.



3.8.4. Наибольшее и наименьшее значения

непрерывной функции на отрезке и в открытом промежутке.

Известно, что всякая функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на нем хотя бы один раз своего наибольшего M и наименьшего m значений. Решение этой задачи проводится по следующему алгоритму:

- 1) Найти все критические точки и отобрать те из них, которые принадлежат отрезку $[a, b]$;
- 2) Вычислить значения функции $f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка;
- 3) Отобрать среди них наибольшее M и наименьшее m .

Поясним, почему при решении данной задачи исследование критических точек на экстремум является излишним. Во-первых, если критическая точка не является точкой экстремума, то вычислив значения функции в такой точке, мы очевидно, не получим как наибольшего так и наименьшего ее значений. Во-вторых, не всякий максимум так же как и не всякий минимум, дают соответственно наибольшее или наименьшее значения непрерывной функции на отрезке, которые она может принимать и на его концах.

Пример 3.48. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[1; 4]$.

Решение. Находим критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2. \text{ Отрезку } [1; 4]$$

принадлежит только точка x_2 . Вычисляем значения функции в этой

точке и на концах отрезка: $f(2) = -3$, $f(1) = -1$, $f(4) = 17$. Таким образом, $M = f(4) = 17$, $m = f(2) = -3$, т.е. наибольшее значение функция принимает на правом конце отрезка, а наименьшее — во внутренней точке $x = 2$.

Если речь идет о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной функции на интервале (a, b) или на одном из бесконечных открытых промежутков — $(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$, то наибольшее значение будет достигаться функцией в одной из точек максимума, а наименьшее — в одной из точек минимума, либо одно из них или оба вовсе не будут существовать. Поясним сказанное на примере.

Пример 3.49. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Решение. В силу условия задачи речь идет об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции на всей области определения: $(0; +\infty)$. Находим критические точки:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \text{ при } x = e. \text{ Исследуем эту точку на экстремум:}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}, \quad f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0,$$

следовательно, функция имеет в точке $x = e$ максимум, и так как он единственный, то будет являться наибольшим значением функции:

$$M = f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Других критических точек нет, промежуток } (0; +\infty)$$

открытый, поэтому наименьшего значения функция не имеет.

Глава 4. Функции нескольких переменных

4.1. Область определения, линии и поверхности уровня

Определение понятия функции двух и большего числа переменных является аналогом соответствующего понятия для случая функции одной переменной, а именно:

Определение 1. Если каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x; y)$ из некоторого множества D ставится в соответствие по некоторому закону f единственное действительное значение переменной z из множества Z , то z называется функцией независимых переменных (аргументов) x и y , что записывается так: $z = f(x, y)$. Множество D называется областью определения, а Z — множеством значений функции z .

Так как существует взаимно однозначное соответствие между парами чисел $(x; y)$ и точками на плоскости, для которых эти числа являются декартовыми прямоугольными координатами, то

множество D представляет собой некоторую область на плоскости (открытую или замкнутую).

Пример 4.1. Найти и построить область определения функции

$$z = \ln(y - x^2 - 1) + \sqrt[4]{9 - y^2}.$$

Решение. Используя известные из курса функции одной переменной области определения логарифма и корня четной степени, имеем:

$$D(z): \begin{cases} y - x^2 - 1 > 0 \\ 9 - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x^2 + 1 \\ |y| \leq 3 \end{cases}.$$

Графическое решение этой системы неравенств показано на рис. 4.1. Штриховой линией обозначен тот факт, что точки, лежащие на параболе, не входят в область определения функции.

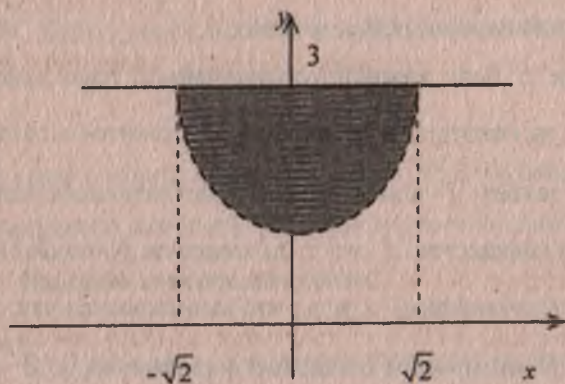


Рис. 4.1.

Графиком функции двух переменных является множество точек в пространстве с координатами $(x, y, f(x, y))$. Это, вообще говоря, некоторая поверхность, а $z = f(x, y)$ — уравнение этой поверхности. В большинстве случаев задача построения такой поверх-

ности является весьма сложной, и для иллюстрации вида этой поверхности служат линии уровня функции.

Определение 2. Множество точек на плоскости XOY , в каждой из которых функция $z = f(x; y)$ принимает одинаковое значение, называется *линией уровня функции*.

Уравнение линий уровня, таким образом, имеет вид:

$f(x; y) = c$, $c = \text{const}$. Изобразив линии уровня, можно в некоторых случаях представить вид поверхности $z = f(x; y)$.

Пример 4.2. Найти и построить линии уровня функции $z = 4x^2 + y^2$.

Решение. $4x^2 + y^2 = c$, где $c \geq 0$ – уравнение линий уровня. Если $c = 0$, то это точка $(0; 0)$. Если $c > 0$, то это семейство концентрических эллипсов с центрами в начале координат и полуосями

$$a = \frac{\sqrt{c}}{2}, b = \sqrt{c} : \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{c})^2} = 1.$$

Нарисовав несколько линий уровня, нетрудно представить, что поверхность $z = 4x^2 + y^2$ имеет форму чаши (рис. 4.2).

Аналогично вводится понятие функции трех и большего числа переменных. Уравнения $f(x; y; z) = c$ определяют *поверхности уровня функции* $u = f(x; y; z)$.

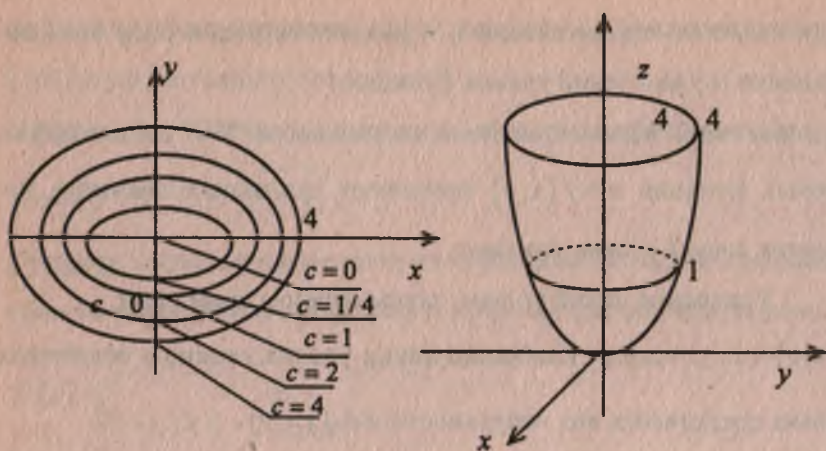


Рис. 4.2.

4.2. Частные производные и дифференциал первого порядка

Одними из важнейших в курсе функций нескольких переменных являются понятия частных производных и дифференциала, которые, в свою очередь, основаны на понятии *предела*: пусть функция $z = f(x; y)$ определена для всех точек $(x; y)$ из некоторой окрестности Ω точки $(x_0; y_0)$, исключая, быть может, саму эту точку. Число b называется пределом функции $z = f(x; y)$ при стремлении точки $(x; y)$ к точке $(x_0; y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $(x; y) \in \Omega$, $(x; y) \neq (x_0; y_0)$ и удовлетворяющих условию

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \text{ выполняется неравенство}$$

$|f(x; y) - b| < \varepsilon$. При этом пишут: $b = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ или

$$b = \lim_{(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)} f(x; y).$$

Определение 3. Частной производной функции нескольких переменных по одному из ее аргументов называется предел отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Например, пусть $z = f(x; y)$, тогда $\frac{\partial z}{\partial x}$, или $\frac{\partial f}{\partial x}$, или

$$f'_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \text{ где } \Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y), \text{ называется част-}$$

ной производной (первого порядка) от функции $z = f(x; y)$ по аргументу x . Аналогично определяется частная производная по аргументу y :

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ или } f'_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \text{ где}$$

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ выражают “скорость изменения” функции $z = f(x; y)$ по направлению координатных осей OX и OY соответственно.

Определение 4. Функция $z = f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho), \quad (4.1)$$

где $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$ (по определению o -малого), $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Главная, линейная относительно приращения аргументов, часть полного приращения функции — $A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y$ — называется *дифференциалом функции* в данной точке и обозначается dz .

Формула, по которой находится дифференциал функции, основана на теореме:

Теорема 1. Если частные производные f'_x и f'_y непрерывны (как функции x и y) в точке $M(x, y)$, то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке и ее дифференциал находится по формуле:

$$dz(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy, \quad (4.2)$$

где dx , dy — дифференциалы аргументов. Если x , y — независимые переменные, то по определению $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Аналогичные определения и теорема имеют место для функции любого конечного числа аргументов. Например, для $u = f(x, y, z)$, $du(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$.

Пример 4.3. Найти частные производные первого порядка от функции $z = \sin^2(xy - x^2 - 1) \cdot e^{xy}$.

Решение. Считая y постоянным, находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2 \sin(xy - x^2 - 1) \cos(xy - x^2 - 1) \times \\ &\times (y - 2x) \cdot e^{xy} + \sin^2(xy - x^2 - 1) \cdot e^{xy} \cdot y = \\ &= e^{xy} \left(\sin 2(xy - x^2 - 1) \cdot (y - 2x) + \sin^2(xy - x^2 - 1) \cdot y \right).\end{aligned}$$

Считая x постоянным, находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \sin 2(xy - x^2 - 1) \cdot x \cdot e^{xy} + \sin^2(xy - x^2 - 1) \cdot e^{xy} \cdot x = \\ &= e^{xy} \cdot x \cdot \left(\sin 2(xy - x^2 - 1) + \sin^2(xy - x^2 - 1) \right).\end{aligned}$$

Пример 4.4. Найти полный дифференциал функции

$u = 4x^{y^2} + \ln(z^2 y)$ а) в произвольной точке $(x; y)$ при произвольных приращениях аргументов dx, dy ; б) в точке $M_0(2; 1; e)$ при приращениях аргументов $dx = 0,3, dy = 0,2, dz = -0,1$.

Решение. Используем формулу для нахождения дифференциала:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \text{ Находим частные производные, преобразовав}$$

вначале выражение для функции u : $u = 4x^{y^2} + 2 \ln z + \ln y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y^2 \cdot x^{y^2-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y + \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2}{z}.$$

$$\text{Тогда а) } du = 4y^2 \cdot x^{y^2-1} dx + \left(8x^{y^2} \cdot \ln x \cdot y + \frac{1}{y} \right) dy + \frac{2}{z} dz;$$

$$\text{б) } du = 4 \cdot 0,3 + (16 \ln 2 + 1) \cdot 0,2 - \frac{0,2}{e} \approx 3,5.$$

4.3. Производная сложной функции

Понятие сложной функции нескольких переменных аналогично соответствующему понятию для функции одной переменной. Не нарушая общности рассуждений, дадим его для функции двух переменных.

Определение 5. Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D , причем каждая из переменных x и y в свою очередь является функцией переменной t в некотором промежутке T : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Пусть, кроме того, значения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не выходят за пределы области D . Тогда $z = f(\varphi(t); \psi(t)) = \Phi(t)$ называется *сложной функцией* аргумента t на этом промежутке T .

Очевидно, что этим случаем не исчерпываются все комбинации суперпозиций функций.

Чтобы сложная функция имела производную, достаточно выполнение условий, сформулированных в следующей теореме.

Теорема 2. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$ и функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ также дифференцируемы в точке t_0 , такой что $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, то *сложная функция*

$z = f(\varphi(t); \psi(t)) = F(t)$ *имеет производную в точке t_0 , которая на-*

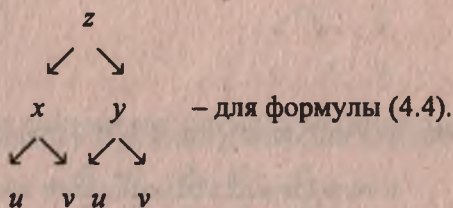
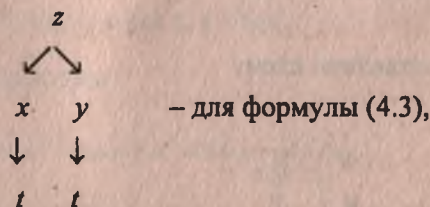
ходится по формуле:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (4.3)$$

Аналогичная теорема и формулы для производных имеют

место для сложной функции нескольких переменных. Например: пусть $z = f(x; y)$, где в свою очередь $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, причем каждая из этих функций является дифференцируемой в соответствующей точке. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (4.4)$$

Чтобы составить формулы для производных сложной функции в произвольном случае, полезно воспользоваться следующими схемами, которые для рассмотренных выше случаев имеют вид:



Пример 4.5. Найти производные сложных функций

1) $z = \frac{y^2}{x}$, где $x = \sqrt{t^2 + 1}$, $y = e^{3t}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $\frac{dy}{dt} = 3e^{3t}$. Тогда по

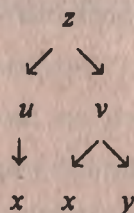
формуле (4.3) $\frac{dz}{dt} = -\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{2y}{x} \cdot 3e^{3t}$, или, подставляя сюда

вместо x и y их выражения через t , окончательно получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3e^{6t}(2t^2 - 3t + 2)}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}}.$$

2) $z = \sqrt{u^2 + v}$, где $u = \varphi(x)$, $v = y^3 \cdot \cos^2 x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Составляем схему



по которой выписываем формулы для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Применяя эти формулы, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v}} \cdot \varphi'(x) + \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v}} \cdot y^3 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = \\
 &= \frac{2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) - y^3 \sin 2x}{2\sqrt{\varphi^2(x) + y^3 \cos^2 x}}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v}} 3y^2 \cos^2 x = \frac{3y^2 \cos^2 x}{2\sqrt{\varphi^2(x) + y^3 \cos^2 x}}.$$

Рассмотрим теперь, как правила дифференцирования сложной функции нескольких переменных дают еще один, кроме известных из курса функций одной переменной, метод нахождения производной степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$.

Пример 4.6. Найти производную y' функции $y = (\sin x)^{\lg x}$.

Решение. Запишем заданную функцию в виде сложной функции двух переменных: $y = u^v$, где $u = \sin x$, $v = \lg x$.

Тогда по формуле (4.3) находим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cos x + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= (\sin x)^{\lg x} \left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} \right). \end{aligned}$$

4.4. Производная функции, заданной неявно.

Неявная функция одной переменной

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется *неявной*, если она задана посредством неразрешенного относительно y уравнения $F(x, y) = 0$.

Чтобы это уравнение определяло y как однозначную функцию от x , имеющую производную, функция $F(x, y)$, стоящая в ле-

вой части этого уравнения, должна удовлетворять определенным условиям. А именно, имеет место следующая

Теорема 3. Предположим, что:

- 1) функция $F(x; y)$ и ее частные производные F'_x и F'_y существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$;
- 2) функция $F(x; y)$ в этой точке обращается в нуль:
 $F(x_0; y_0) = 0$;
- 3) производная F'_y в этой точке отлична от нуля:
 $F'_y(x_0; y_0) \neq 0$.

Тогда: а) в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$ уравнение $F(x; y) = 0$ определяет y как однозначную функцию от x : $y = f(x)$; б) при $x = x_0$ эта функция принимает значение y_0 : $f(x_0) = y_0$; в) функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную в некоторой окрестности точки x_0 и эта производная находится по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x; f(x))}{F'_y(x; f(x))}. \quad (4.5)$$

Пример 4.7. Найти производную $y'(x)$ функции, заданной неявно

уравнением $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$ или

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0. \text{ Имеем: } F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Находим ее частные производные: $F'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$

$$F'_y = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}. \text{ Подставляя их в формулу (4.5),}$$

получаем: $y'(x) = \frac{x + y}{x - y}.$

Неявная функция нескольких переменных

Аналогично уравнению $F(x, y) = 0$ можно рассматривать уравнение с большим числом переменных. Например, уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \text{ определяет } z \text{ как неявную функцию от } x \text{ и } y,$$

$z = f(x, y)$, которая будет иметь частные производные, если выполнены условия сформулированные в следующей теореме.

Теорема 4. Предположим, что:

- 1) функция $F(x; y; z)$ и ее частные производные F'_x, F'_y, F'_z существуют в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; z_0)$;
- 2) $F(x_0; y_0; z_0) = 0$; 3) $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$.

Тогда: а) в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; z_0)$ уравнение

$F(x; y; z) = 0$ определяет z как однозначную функцию от x и y :

$$z = f(x; y);$$

б) при $x = x_0$ и $y = y_0$ эта функция принимает значение z_0 :

$$f(x_0; y_0) = z_0;$$

в) функция $z = f(x; y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$, которые находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; f(x; y))}{F'_z(x; y; f(x; y))} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; f(x; y))}{F'_z(x; y; f(x; y))}. \quad (4.6)$$

Пример 4.8. Найти частные производные z'_x и z'_y функции

$z = f(x; y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

Решение. Находим частные производные функции

$F(x; y; z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4$: $F'_x = -4z$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 3z^2 - 4x$. Далее

по формулам (4.6) получаем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-4z}{4x - 3z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{4x - 3z^2}$.

4.5. Производная по направлению и градиент скалярного поля

Пусть в некоторой области D пространства задана функция $u = f(x, y, z)$. В этом случае говорят, что задано *скалярное поле*, а функцию $u = f(x, y, z)$ называют *функцией этого поля*.

Как уже было отмечено выше, частные производные функции $u = f(x, y, z)$ выражают “*скорость изменения*” функции по направлению осей координат. Между тем во многих физических задачах представляет интерес “*скорость изменения*” функции (или скалярного поля) по другим направлениям.

Определение 7. Производной по направлению, $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$, функции

$u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора

$\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}, \quad (4.7)$$

где $\Delta_l u = u(M) - u(M_0)$ – приращение функции в заданном направлении (вектор $\overline{M_0 M}$ сонаправлен с вектором \vec{l}), а

$$\Delta l = |\overline{M_0 M}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Чтобы найти производную скалярного поля по направлению, достаточно воспользоваться результатами следующей теоремы.

Теорема 5. Если функция $u = f(x; y; z)$ дифференцируема в некоторой области D , содержащей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то производная от функции $u = f(x; y; z)$ в точке M_0 по любому направлению \vec{l} вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_0; y_0; z_0)}{\partial l} = & \frac{\partial u(x_0; y_0; z_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(x_0; y_0; z_0)}{\partial y} \cos \beta + \\ & + \frac{\partial u(x_0; y_0; z_0)}{\partial z} \cos \gamma, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$ — направляющие косинусы вектора \vec{l} .

Из векторной алгебры известно, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4.9)$$

Пример 4.9. Вычислить производную функции $u = y^2 x + z^2 y + x^2 z$ в точке $M_0(0; 2; 1)$ в направлении,

а) идущем из этой точки в точку $N(3; 6; 1)$;

б) составляющем с осями координат углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Находим частные производные функции $u = f(x; y; z)$ и вычисляем их значения в точке M_0 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 4 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2zy + x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0^2 = 4.$$

Находим направляющие косинусы и вычисляем производную по направлению: а) $\vec{l} = \overline{M_0 N} = (3; 4; 0)$, $|\vec{l}| = \sqrt{9+16} = 5$,

тогда $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \gamma = 0$. Подставляя в формулу (4.6),

$$\text{получим: } \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot 0 = \frac{16}{5}.$$

б) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и так как угол $\beta > \frac{\pi}{2}$, то из формулы (4.9)

$$\text{получим } \cos \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя в формулу (4.6), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,5 + 2\sqrt{2} \approx 4,3.$$

Зададимся теперь вопросом: по какому направлению скорость возрастания поля в данной точке будет наибольшей? Этот вопрос, конечно, имеет смысл лишь в том случае, если частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)$ не обращаются одновременно в нуль. Чтобы ответить на этот вопрос, введем понятие градиента функции $u = f(x; y; z)$.

Определение 8. В каждой точке области D пространства, определим вектор, координаты которого равны частным производным функции $u = f(x; y; z)$. Этот вектор называется градиентом функции $u = f(x; y; z)$ и обозначается

$$\overrightarrow{\text{grad}u} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (4.10)$$

В этом случае говорят, что в области D определено векторное поле градиента функции $u = f(x; y; z)$. Из формул (4.8) и (4.10) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \overrightarrow{\text{grad}u} \cdot \vec{e} = |\overrightarrow{\text{grad}u}| \cdot \cos(\vec{e}; \overrightarrow{\text{grad}u}), \quad (4.11)$$

где, $\vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – единичный вектор, в направлении которого находится производная. Из формулы (4.11) вытекают свойства градиента, выявляющие его *геометрический смысл*:

1) *Производная по направлению* равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \text{пр}_l \overrightarrow{\text{grad}u}(M_0). \quad (4.12)$$

2) В направлении градиента *скорость возрастания скалярного поля* наибольшая и равна модулю градиента:

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = |\overrightarrow{\text{grad}u}(M_0)|. \quad (4.13)$$

Пример 4.10. Найти и построить градиент $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ в точке $M_0(1; 3)$.

Решение. $z'_x = -\frac{y}{2\sqrt{x^3}}$, $z'_x(M_0) = -\frac{3}{2}$; $z'_y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $z'_y(M_0) = 1$.

Поэтому $\overline{\text{grad} z}(1; 3) = -\frac{3}{2} \cdot \vec{i} + \vec{j}$ (рис. 4.3)

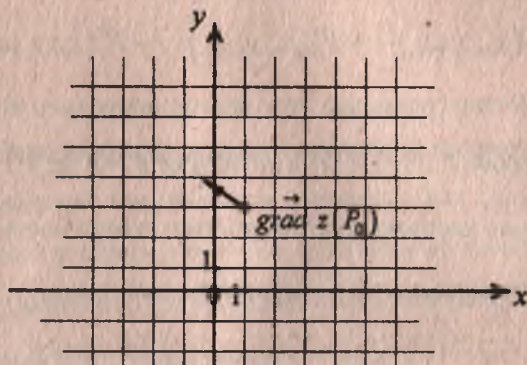


Рис. 4.3.

4.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x; y; z) = 0$ и

$P_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка на этой поверхности такая, что в этой точке частные производные $F'_x(x_0; y_0; z_0)$, $F'_y(x_0; y_0; z_0)$, $F'_z(x_0; y_0; z_0)$ не обращаются в нуль одновременно. Можно показать, что касательные ко всевозможным кривым, проведенным на поверхности через эту точку, лежат в одной плоскости, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в точке P_0 . Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности в этой точке.

Чтобы составить уравнение касательной плоскости надо, кроме точки P_0 , знать нормальный вектор \vec{n} этой плоскости, он же будет являться направляющим вектором нормали к поверхности. Таким вектором является

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(P_0) = F'_x(x_0; y_0; z_0) \cdot \vec{i} + F'_y(x_0; y_0; z_0) \cdot \vec{j} + F'_z(x_0; y_0; z_0) \cdot \vec{k},$$

так как по свойству градиента этот вектор направлен по нормали к поверхности уровня $F(x; y; z) = 0$ функции $u = F(x; y; z)$. Таким образом, уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ и уравнение нормали к этой поверхности имеет вид:

$$F'_x(x_0; y_0; z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0) \cdot (z - z_0) = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}. \quad (4.15)$$

Пример 4.11. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности эллиптического параболоида

$$z = 2x^2 + 4y^2 \text{ в точке } P_0(1; -1; 6).$$

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде: $2x^2 + 4y^2 - z = 0$.

Таким образом, функция $F(x; y; z) = 2x^2 + 4y^2 - z$. Находим ее частные производные и вычисляем их значения в точке P_0 :

$F'_x = 4x$, $F'_x(1; -1; 6) = 4$; $F'_y = 8y$, $F'_y(1; -1; 6) = -8$; $F'_z = -1$. Подставляя эти значения для частных производных и координаты точ-

и P_0 в уравнения (4.14) и (4.15), получим:

$4(x-1) - 8(y+1) - (z-6) = 0$ или $4x - 8y - z - 6 = 0$ — уравнение касательной плоскости; $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-6}{-1}$ — уравнение нормали к поверхности.

4.7. Экстремум функции нескольких переменных

Определение максимума и минимума для функции нескольких переменных аналогично соответствующему понятию для функции одной переменной. Не нарушая общности рассуждений, дадим его для функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение 9. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в точке $(x_0; y_0)$ и ее некоторой δ -окрестности: $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$.

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $(x_0; y_0)$ максимум (минимум), если для любой точки $(x, y) \neq (x_0; y_0)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x, y) < f(x_0; y_0), \text{ или } \Delta f(x_0; y_0) < 0$$

$$(f(x, y) > f(x_0; y_0), \text{ или } \Delta f(x_0; y_0) > 0). \quad (4.16)$$

Общий термин для максимума и минимума — экстремум. Исследование на экстремум функции нескольких переменных основано на следующих двух теоремах.

Теорема 6. Необходимое условие экстремума.

Пусть в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум. Если в этой точке существуют конечные частные производные первого порядка, то они равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0; y_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0; y_0) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Точки, в которых выполняются условия (4.17), называются *стационарными* или *точками возможного экстремума*.

Теорема 7. Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности. Обозначим через

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0; y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0; y_0), \quad a_{22} = f''_{yy}(x_0; y_0)$$

и составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (4.18)$$

Если:

- 1) $\Delta > 0$, $a_{11} < 0$, то $(x_0; y_0)$ – точка максимума функции $f(x; y)$;
- 2) $\Delta > 0$, $a_{11} > 0$, то $(x_0; y_0)$ – точка минимума функции $f(x; y)$;
- 3) $\Delta < 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ функция $f(x; y)$ не имеет экстремума,

4) $\Delta = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума остается открытым.

В связи со сформулированным выше определением и теоремами сделаем следующие важные замечания:

- 1) если определение экстремума и теорема 6 носят общий характер, то теорема 7 справедлива только для функции двух переменных;
- 2) если определитель $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума следует либо обратиться к определению (формулы (4.16)), либо привлечь высшие производные;
- 3) критическими являются также и такие точки, в которых хотя бы одна из частных производных первого порядка не существует, а остальные равны нулю; такие критические точки можно исследовать на экстремум только по определению (4.16).

Пример 4.12. Исследовать на экстремум следующие функции

1) $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 7$.

Решение. Находим стационарные точки:

$z'_x = 24x^2 - 6y$, $z'_y = 3y^2 - 6x$. Решаем систему:

$$\begin{cases} 24x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x^2 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow 16x^4 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$y_1 = 0, y_2 = 1$.

Итак, стационарными точками являются $M_1(0; 0)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума (см. т. 7) в этих точках. Находим: $z''_{xx} = 48x$, $z''_{xy} = -6$, $z''_{yy} = 6y$.

а) Для точки $M_1(0; 0)$ получаем: $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -6$ и $\Delta(M_1) = -36 < 0$; следовательно, в точке M_1 функция не имеет экстремума.

б) Для точки $M_2\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ получаем: $a_{11} = 24$, $a_{12} = -6$, $a_{22} = 6$ и $\Delta(M_2) = 24 \cdot 6 - 36 > 0$, и, так как $a_{11} > 0$, то M_1 — точка минимума функции, $z_{\min}\left(\frac{1}{2}; 1\right) = 4$.

2) $z = (x - y)^2 + (y - 1)^3$. Находим стационарные точки:

$z'_x = 2(x - y)$, $z'_y = 2(y - x) + 3(y - 1)^2$. Решаем систему:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2(y - x) + 3(y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1; 1).$$

Проверим выполнение достаточных условий экстремума в точке M_0 . Находим $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{yy} = 2 + 6(y - 1)$, тогда $a_{11} = 2$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 2$, $\Delta(M_0) = 0$ и вопрос об экстремуме остается открытым.

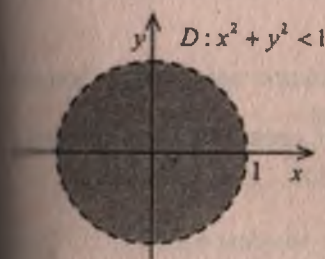
Исследуем знак полного приращения функции в точке M_0 .

Находим $\Delta z(1; 1) = z(x; y) - z(1; 1) = (x - y)^2 + (y - 1)^3$. Пусть точки

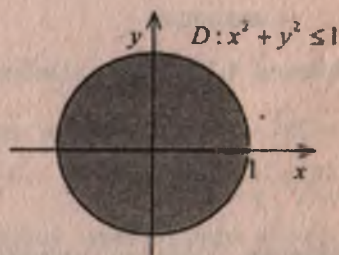
$M(x, y)$ лежит на прямой $y = x$. Тогда $\Delta z = (y-1)^3$ и $\Delta z > 0$, если $y > 1$ (т.е. точка M лежит на прямой выше точки M_0), и $\Delta z < 0$, если $y < 1$. Так как вблизи точки M_0 приращение Δz не сохраняет знак, то в точке M_0 функция не имеет экстремума.

4.8. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области

Замкнутая ограниченная область D на плоскости – это аналог отрезка на числовой прямой, а открытая область – аналог интервала. Примеры на рис. 4.4. иллюстрирует сказанное.



открытое ограниченное
множество



замкнутое ограниченное
множество

Рис. 4.4.

Как и в случае функции одной переменной, функция $z = f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , достигает в ней хотя бы один раз своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция принимает либо в точках экс-

тремума, лежащих внутри области D , либо в точках, лежащих на ее границе.

Алгоритм задачи отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D таков:

- 1) найти стационарные точки функции, отобрать те из них, которые лежат внутри области D , и вычислить значения функции в этих точках, не исследуя их на экстремум;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D ;
- 3) отобрать из всех этих значений функции наибольшее и наименьшее.

Пример 4.13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$.

Решение. Согласно указанному алгоритму:

- 1) Находим частные производные функции z :

$z'_x = 6x^2 + 8x - 2y$, $z'_y = 2y - 2x$. Решая систему $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, найдем стационарные точки $M_1 = (0; 0)$ и $M_2 = (-1; -1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области (см. рис. 4.5).

- 2) Ищем наибольшее и наименьшее значения функции z на границе области. Она состоит из двух участков AOB и ACB , имеющих различные уравнения.

Поэтому вначале найдем наибольшее и наименьшее значения z на каждом из этих участков, потом, сопоставляя их, отберем наибольшее и наименьшее значения z на всей границе.

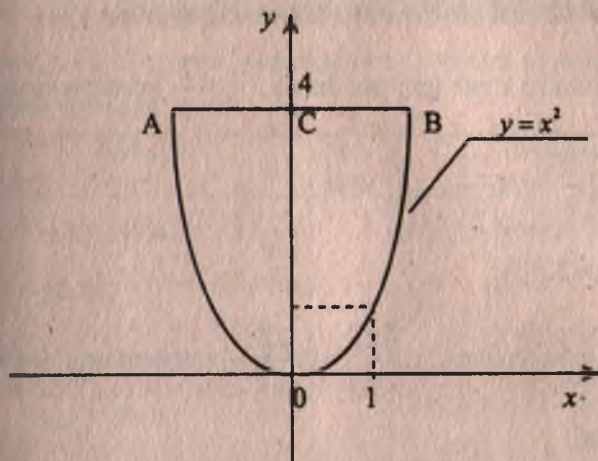


Рис. 4.5.

На участке AOB имеем $y = x^2$, $z_1(x) = x^4 + 4x^2$, где $x \in [-2; 2]$. Используем правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке:

- $z'_1 = 4x^3 + 8x$; $z'_1 = 0$ при $x = 0$, $z_1(0) = 0$.
- $z(-2) = z_1(2) = 32$.
- сравнивая значения z_1 во внутренней стационарной точке $x = 0$ и на концах отрезка $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ заключаем: $z_1(\pm 2) = 32$ — наибольшее, $z_1(0) = 0$ — наименьшее значения z_1 на этом отрезке.

На участке ACB имеем:

$y = 4$, $z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, где $x \in [-2; 2]$. Ищем наибольшее и наименьшее значения функции z_2 на отрезке $[-2; 2]$:

а) $z_2' = 6x^2 + 8x - 8$; решая уравнение $z_2' = 0$, находим

$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -2$; только одна из этих точек, $x_1 = \frac{2}{3}$ лежит внутри от-

резка $[-2; 2]$; $z_2\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{22}{27}$.

б) $z_2(-2) = z_2(2) = 32$

в) $z_2(\pm 2) = 32$ — наибольшее, $z_2\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{22}{27}$ — наименьшее значения z_2 на этом отрезке.

Сопоставляя наибольшее и наименьшее значения функции на участках AOB и ACB границы, приходим к выводу: на всей границе $AOBCA$ наибольшее значение функции z равно 32 (в точках A и B), а наименьшее — нулю (в точке O).

3) так как внутри заданной области функция z не имеет стационарных точек, то ее наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках, лежащих на границе области:

$$z_{\text{нб}} = z(\pm 2; 4) = 32, z_{\text{нм}} = z(0; 0) = 0.$$

ГЛАВА 5. Варианты расчетно-графических работ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ

«ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ» (приложение 1)

Задание 1 – 4. Построить график функции. Описать основные свойства заданных функций.

№ Вар.	Функция	№ Вар.	Функция
1.	$1) y = \arctg(x-1) + 2$ $2) y = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq -1 \\ x+1, & x < -1 \end{cases}$ $3) y = \arccos(\cos 3x)$ $4) y = \sec x$	4.	$1) y = 2 \log_{1/3}(1-x)$ $2) y = \begin{cases} \operatorname{ctgx}, & x \leq \pi/2 \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot (\pi - x), & x > \pi/2 \end{cases}$ $3) y = x - \sqrt{1 - \operatorname{cosec} x }$ $4) y = \frac{1}{2x^2 + 3x + 1}$
2.	$1) y = -\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 1$ $2) y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \leq 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ $3) y = \arcsin\left(\sin \frac{x}{3}\right)$ $4) y = \frac{1-x}{2x+1}$	5.	$1) y = -\frac{3}{(x+1)^2} + 1$ $2) y = \begin{cases} \arctgx , & x \leq 1 \\ \pi/4, & x > 1 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{- x^2 - 9 } + 1$ $4) y = \frac{1}{x^2 + 6x}$
3.	$1) y = 3 - \operatorname{arctgx} $ $2) y = x + 2x-1 $ $3) y = \sqrt[4]{\sin x - 1} + x$ $4) y = \frac{1}{2x^2 + x}$	6.	$1) y = 3 \cos \frac{x}{2} + 1$ $2) y = x-1 \cdot (x+5)$ $3) y = x \cdot \sin x$ $4) y = \frac{1}{x^2 - 10x + 24}$

7.	$1) y = 2 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) - 1$ $2) y = \begin{cases} 0,5^x, & x \geq 0 \\ x+1 , & x < 0 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{\ln \cos x}$ $4) y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$	11.	$1) y = 2 + 3 \sin \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} \right)$ $2) y = \begin{cases} \log_1 x, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}, & x < 1 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{\ln \sin x}$ $4) y = \operatorname{cosec} x $
8.	$1) y = \frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 3$ $2) y = (x^2 - 5x) \cdot \frac{ x-5 }{x-5}$ $3) y = \sqrt{\sin x}$ $4) y = \left \frac{2x-1}{x+3} \right $	12.	$1) y = -\frac{2}{(x+2)^2} + 5$ $2) y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x < 0 \\ x + \pi/2, & x \geq 0 \end{cases}$ $3) y = 1 + \sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos x}$ $4) y = \frac{1}{x^3 - 25x}$
9.	$1) y = \lg \sqrt{x-3} - 1$ $2) y = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq -1 \\ -(x+3)(x+1), & x < -1 \end{cases}$ $3) y = \frac{x}{4} + \sqrt{1 - \sec x }$ $4) y = \frac{1}{4x^2 - 1}$	13.	$1) y = 2 + e^{ x-3 }$ $2) y = \begin{cases} x^2 - 5x, & x \geq 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x < 0 \end{cases}$ $3) y = x + \sin x$ $4) y = \frac{1}{8x^2 + 4x}$
10.	$1) y = 1 + \arcsin(x-3)$ $2) y = \frac{ x -1}{ 2+x }$ $3) y = \sin^2 x$ $4) y = \sqrt[4]{\cos x - 1} + \frac{x}{2}$	14.	$1) y = (x-3)^3 + 5$ $2) y = x + x^2 - 4 $ $3) y = x + \sin x$ $4) y = \frac{1}{x^2 - 16}$

18.	$1) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{ x }{4} + 1$ $2) y = \begin{cases} \arccos x, & x \geq 0 \\ -x^2 + x - \frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$ $3) y = 2x + \sqrt{1 - \sec x }$ $4) y = \frac{1}{x^2 - 9}$	19.	$1) y = -\frac{3}{(x-2)^2} + 1$ $2) y = \begin{cases} \log_2 \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$ $4) y = \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 8x}$
16.	$1) y = 1 + 2 \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{x}{2} \right)$ $2) y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x , & x < 1 \end{cases}$ $3) y = \frac{x}{2} + \sqrt{\sin x - 1}$ $4) y = \frac{1}{x^3 - 8x + 15}$	20.	$1) y = \frac{\pi}{2} + \arccos(x+1)$ $2) y = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \\ 0, & x \leq -1 \end{cases}$ $3) y = \sqrt[4]{\log_3(\cos x)}$ $4) y = \left \frac{5x-3}{1-x} \right $
17.	$1) y = 2 - \operatorname{arctg} x $ $2) y = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0 \\ x - 4x^2, & x > 0 \end{cases}$ $3) y = \frac{\sin x}{x} \quad 4) y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$	21.	$1) y = -3 \operatorname{arctg}(x+2,5)$ $2) y = 2-x + 2+x $ $3) y = \sqrt{\cos \frac{x}{2}} \quad 4) y = \frac{1}{x-4x^3}$
18.	$1) y = \lg(x-2) + 3 $ $2) y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \leq 0 \\ 0,5^x - 1, & x > 0 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{- x^2 - 1 } + 2$ $4) y = \frac{1}{x^3 - 9x}$	22.	$1) y = \left \log_{1/3} \sqrt{x+1} - 2 \right $ $2) y = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x \geq -3 \\ -(x+4)(x+3), & x < -3 \end{cases}$ $3) y = 3x - \sqrt{1 - \operatorname{cosec} x }$ $4) y = \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

23.	$1) y = 1 + \arcsin(1-x) $ $2) y = x-1 + x \cdot x $ $3) y = \sqrt{\cos x - 1} + x$ $4) y = \frac{1}{x^3 + 4x^2 + 3x}$	27.	$1) y = \left \frac{\pi}{2} - \arcsin x \right $ $2) y = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x \geq 1 \\ -(x+2)(x-1), & x < 1 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{\sin 2x - 1}; 4) y = \frac{1}{x^3 - 25x}$
24.	$1) y = 0,5 \log_3 \frac{1}{x+1}$ $2) y = \frac{ x }{x} \sin \frac{x}{2}$ $3) y = \sqrt[3]{\sin x - 1}$ $4) y = \frac{1}{2x^2 - x}$	28.	$1) y = \arcsin(x-1) + 1$ $2) y = \begin{cases} \sqrt{4-x}, & x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 20, & x > 4 \end{cases}$ $3) y = \sqrt{\log_3(\sin 2x)}$ $4) y = \frac{6}{x^2 + x}$
25.	$1) y = 1 - \operatorname{arctg}(x+12) $ $2) y = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x \geq -3 \\ x+3, & x < -3 \end{cases}$ $3) y = \cos(\arccos x)$ $4) y = \frac{1}{x^2 - 16}$	29.	$1) y = \log_3 x-1 + 2$ $2) y = \begin{cases} -(x-2,5)(x-5,5), & x \geq 2,5 \\ \sqrt{5-2x}, & x < 2,5 \end{cases}$ $3) y = x - \sin x; 4) y = \frac{1-2x}{x+2}$
26.	$1) y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-3} + 2$ $2) y = \begin{cases} x^{1,5}, & x \geq 0 \\ \sin 2x, & x < 0 \end{cases}$ $3) y = \sin(\arcsin x)$ $4) y = \left \frac{3x+1}{x-2} \right $	30.	$1) y = \log_2 \frac{1}{x+1} + 2$ $2) y = \begin{cases} x-2 , & x \geq 0 \\ 1+2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ $3) y = \sqrt[4]{\ln(\cos x)}$ $4) y = \frac{1}{4x^2 - 5x}$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ

«ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ» (приложение 2)

Вариант 1.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 5(-1)^n n^3 + 9}{6n^5 + 6n^2 + 1}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)(4n+5)(7n-4)^2}{(3n-1)(2n^2-3)(1-5n)}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^4 + 9n^3 + 5 + 2n}}{\sqrt[3]{3n^7 + 9n^5 + 4n + 1}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^{n+2} + 3 \cdot 2^{n-1}}{5^{n-1} + 7 \cdot 2^{n+1}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 4n - 2} - n)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{(n+3)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2} \right]$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 - n + 1} - \frac{n^2}{n + 2} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}{n + 1} - n \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{2n+1} - \cos \sqrt{2n})$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2n}{3 + 2n} \right)^{\sqrt{3n+1}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 + 3n + 1} \right)^{2n}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n-1} \right) \cos \left(\frac{n^2 + 2n}{3n+4} \right)$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3} - 2n}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n+2}}$$

Вариант 2.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^6 + 2 \cdot (-1)^n}{5n^6 - 6n^5 + 32}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5\sqrt{n} + 2)^4 (8n + 2)^2}{2n^4 + 5n + 33}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 3n}{\sqrt{3n^4 + n} + \sqrt[3]{4n^6 + 7}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)n!}{(n+1)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-2} + 3^{n+4}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5^{-1} + 5^{-2} + \dots + 5^{-n}}{1 + 3^{-1} + 3^{-2} + \dots + 3^{-n}}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} (\sqrt[3]{2n+4} - \sqrt[3]{2n-4})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{4n^2+1}-2n) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^2}{4n+5} - 2n \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{\sqrt{3n+6}} - \sqrt{3n} \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{4\sqrt{n}+1} - \sin \sqrt{4\sqrt{n}-1}) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{5n+3}}{6n+1} \sin \frac{n^2+6}{\sqrt{3n+4}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{\sqrt{2n^2+n}} \right]^{3n} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{7n+1}}{\sqrt{7n+2}} \right)^{\sqrt{n+1}} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}}$$

Вариант 3.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^7 + n^6 \cos n + 9}{2n^6 - 5n^2 + \sin 9n} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+1)^2(1-3n)^2}{(6n+1)^5 - 2n^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^4+6n^2} + \sqrt[3]{3n^3+5n^2}}{9n+4} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n+2)!}{((n+3)!)^2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+2^2+\dots+2^{2n}}{2^{2n+3}} \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+2}}{\sqrt{6 \cdot 5^{2n+1}} + 3}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/3} (\sqrt[3]{2n^2+3} - \sqrt[3]{2n^2-3}) \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2+7n+2})$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^4}{2n^2+n} - 2n^2 \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1+2+3+\dots+n}}{2n+1} - 2n \right) \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n^2+2} - \sin \sqrt{n^2-2})$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{4n+3}+4}{\sqrt[3]{2n^3+n+3}} \cos \frac{\sqrt{7n^2+5}+3}{\sqrt[3]{2n^3+4n}} \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+2}{\sqrt{n^2+1}+4} \right)^{2n}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{5\sqrt{4n+3}} \right)^{\sqrt{2n+1}} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2-n}}{\sqrt{n^2+3-n}}$$

Вариант 4.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+4n^2+7n^2}{6n^2+32\sin n} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+12)^2+4n^2}{(3n+2)^2(5n+6)^4}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^3+2n^2+3-3n^2+2}}{2n^2+4n+78} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n-1)!)^3}{n!(n-2)!(n+1)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-3})^2}{3 \cdot 5^{2n+1} + 2^2} \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 \cdot 7^{2n} + 99 + 7^{n+1}}}{1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{3n^3+2} - \sqrt[3]{3n^3-2}) \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3})$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{9n^2+2}}{n} - 3n \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n^4}{n^2+3n+2} - n^2 \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{n^2+3} - \cos \sqrt{n^2-3}) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \operatorname{arctg} \frac{3}{n+4}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3\sqrt{n}}{2+3\sqrt{n}} \right)^{(1-n)(1-\sqrt{n})} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)^{(n^2+1)(n+1)} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1-n}}{\sqrt{n^2+2-n}}$$

Вариант 5.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{10} - 4n^2 + 5 \cdot (-1)^n}{3n^9 + 5^2 + 122} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 + (3n+2)^6}{(2n+1)^4 + (2n+1)^6}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+3-3n^2+2}}{\sqrt{7n^4+2n^3+1+n^2}} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!n!}{(n+1)n!} \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 \cdot 3^{2n-1}} + 4}{2^{n+3} - 3^{n+1}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-2}}{1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n} \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+4}} - \sqrt{n} \right)$$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+2+\dots+2n)^2 - n^3}{n} \right]$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt[3]{7n+1} - \cos \sqrt[3]{7n})$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \sin 2n}{5 + \cos 3n} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8n+1} + 6}{\sqrt[3]{n^4 + n^3}}$ 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2n+1}}{3 + \sqrt{2n+1}} \right)^{2\sqrt{n}}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 2n + 5} \right)^{2n^2}$ 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n-2}}{n - \sqrt[3]{n^3 + 1}}$

Вариант 6.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^3 - (2+n)^3}{(2-n)^3 + (2+5n)^3}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^4 - 5n^4}{(3n+1)^3 (\sqrt{n}+2)^2}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n^3+1} + 2\sqrt[4]{4n^4+3}}{\sqrt[3]{n^3+3} + 6\sqrt[4]{n^4+n}}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+3)!(n-1)!}$ 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2^{3n-2} + 3^{3n}}}{2^n - 5 \cdot 3^{n-2}}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+3+3^2+\dots+3^{2n}} - 2^n}{3^{n-2} - 2^{n-2}}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5+1})$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + \sqrt[3]{3-8n^3})$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - \sqrt{n}}{2n+4} - 2n^2 \right)$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt[3]{n+1} - \cos \sqrt[3]{n}) (1 + \sin n)$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{3n^4+n}}{\sqrt[3]{5n^6+5}} \sin(n^2)$ 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3+1}{3n^3+n} \right)^{n^2+1}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[3]{n^3+2+3}} \right)^n$ 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2+3n+1}}{2n - \sqrt{4n^2+1}}$

Вариант 7.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3n^2+3n)^6}{(4n^3-n+7)^4}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n-2)^4}{(5n^2-2)(3\sqrt[3]{n^2+1})^3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^6+1}}{\sqrt[3]{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+1)!}{(n-1)! + (n+1)!}$ 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^{2n-1}+2}}{5 \cdot 3^{n-2} + 2^n}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n-8n^3+2n})$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt{n^4+n^2\sqrt{n^4+n}} - \sqrt{2n^4})$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sqrt{n}-1)^2}{\sqrt{n}+2} - \sqrt{n} \right]$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+3}{2} \right]$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n^2+n}{n^2+3}$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+2}{n^2} \right)^n$ 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(1 - (-1)^n) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{n + \sqrt{n^3+4}}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2n+2} \right)^n$ 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n-n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} - \sqrt{n}}$

Вариант 8.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^6 - 6(-1)^n n^5 + 7}{2n^6 - 8n^2 + 11}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-7)(2n+5)(3n-2)^4}{(5n^2-1)(2n-3)(1-n)^3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{7n^4+n^3+2-4n}}{\sqrt[3]{2n^3-3n^6-7n+2}}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+2)!}{(n+3)!}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 3^{n-3} - 3 \cdot 2^{n-2}}{3^{n-1} + 9 \cdot 2^{n+1}}$ 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+5^2+\dots+5^{2n}}{1+3+3^2+\dots+3^{2n}}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{(n+5)^2} - \sqrt{(n-5)^2})$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2-2n+2} - \frac{n^2}{n+3} \right)$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{(n+5)^2} - \sqrt[3]{(n-5)^2} \right)$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 - 2n + 2} - \frac{n^2}{n + 3} \right)$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}{2n + 1} - 3n \right)$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{n+6} - \cos \sqrt{n} \right) \sin \frac{n\pi}{2}$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-5n}{2-5n} \right)^{3n+1}$ 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{2n^2 + n - 1} \right)^{3n}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n}}{2n + \sqrt{n}} \right) \cos \left(\frac{n^2 + 2}{4n + 5} \right)$ 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3} - 2n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

Вариант 9.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + \cos(n^2)}{3n^6 - 2^4 + 9}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt{n} + 3)^2 (4\sqrt{n} - 1)}{5n^2 - 11n + 39}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}{\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt[3]{3n^6 + 4}}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2)n!}{(n + 2)!}$ 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 7^{n-1}}{3 \cdot 7^{n+1} - 3^{n+4}}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5^{-1} + 5^{-2} + \dots + 5^{-n}}{1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n}}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n^2 + 3} - \sqrt[3]{n^2 - 3} \right)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{9n^2 + 5} - 3n \right)$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n + 3} - n \right)$ 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{\sqrt{2n-3}} - \sqrt{2n} \right)$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{3\sqrt{n} + 1} - \sin \sqrt{3\sqrt{n} - 1} \right)$ 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2n-1}}{4n+1} \sin \frac{4n+2}{\sqrt{n+7}}$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - 3(2n^2 - 1)^{-1/2}]^{3n}$ 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{6n+3} - 1}{\sqrt{6n+3}} \right)^{\sqrt{n+3}}$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-1}}{\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + 2}}$

Вариант 10.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n^2 \sin(n+1) + 12}{3n^2 - 11n^2 + 110}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^6 (1-3n)^2}{(2n+1)^9}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{4n^4 + n^3} + \sqrt[3]{7n^3 + 4n^2}}{8n + 31}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)!}{((n+3)!)^2}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^{n+3}}$ 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 7^{n+2}}{\sqrt[7]{7^{2n-1}} + 6}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/3} \left(\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2 - n} \right)$ 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{7n} - \sqrt{7n^2 + n + 6} \right)$

Вариант 11.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^4 + n}{3n^2 + 1} - n^2 \right)$ 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1+2+3+\dots+n}}{n+1} - n \right)$
 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{n^4 + 1} - \sin n^2 \right)$ 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n+2} - 1}{\sqrt[3]{3n^3 - n} + 2} \sin \frac{\sqrt{n+1} + n}{\sqrt[3]{n^2 + 3}}$
 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2n^2 + 1} + 2}{\sqrt{2n^2 + 1} + 1} \right)^{3n}$ 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{2n-1}} \right)^{\sqrt{4n+5}}$
 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 3} - 3n}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 6n^7 + \cos n}{2n^5 + n^7 + \cos 4n}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+1)^9 - 7n^9}{(2n+3)^6 (1-2n)^3}$
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n^{10} + n^5} - 2n^2}{5n^2 + n + 8}$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^3}{n!(n-2)!(n+2)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4 \cdot 3^{n+2} - 2^{n-3})^2}{2 \cdot 3^{2n+1} + 2^n}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 \cdot 2^{2n} + 39}}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 7} - \sqrt[3]{n^3 - 7})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+4} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+5})$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{4n^2 + 2}}{2n} - n \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n^4}{n^2 + n + 5} - n^3 \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{\sqrt{n^3} + 1} - \sin \sqrt{\sqrt{n^3} - 1})$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - (-1)^n}{3 + (-1)^n} \arcsin \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 4\sqrt{n}}{3 - 4\sqrt{n}} \right)^{(1-n)/(1-\sqrt{n})}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 3} \right)^{(n^2+4)/(n+2)}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 3} - 2n}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$$

Вариант 12.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 + (-1)^n n^5 + 9}{2n^5 + 3n^4 + 8}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n+3)^4 + (7n+1)^2}{(2n+1)^4 + (2n^3+7)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^8 + 3} + 2^2 + 62}{\sqrt{3n^4 + 2n^3 + 1} - n^2 + n}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)n!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 \cdot 3^{2n-1}} + 3}{2^{n+1} + 3^{n-2}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2^{2n-1}}{1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n + \sqrt{13n}} - \sqrt{n})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 9} - \sqrt[3]{n^3 - 9})$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} - \sqrt{n} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+2+\dots+n)^2}{n} - n^3 \right]$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt[3]{2n+1} - \cos \sqrt[3]{2n})$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \cos 3n}{6 + \cos 5n} \arctg \frac{\sqrt{2n+1} + 4}{\sqrt[4]{4n^3 + n}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3n+1}}{2 + \sqrt{3n+1}} \right)^{\sqrt[3]{n}}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 3}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n^2}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-2}}{n - \sqrt[3]{n^3 + 1}}$$

Вариант 13.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2n)^4 + (1+2n)^6}{(1-2n)^4 - (1+6n)^6}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^4 - 3n^4}{(3n-1)^3 (\sqrt{n}-2)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{7n^3 + 1} - 2\sqrt[3]{n^4 + n}}{\sqrt[3]{n^3 + 2} + 6\sqrt[4]{n^4 + 3}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n-2)!}{[(n+1)!]^2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5^{3n-1} + 3^{3n}}}{2^n + 7 \cdot 5^{n+2}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+3+3^2+\dots+3^{2n}} + 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} + 7 \cdot 2^{n-1}}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt{n(n^4+2)} - \sqrt{n^5-2})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{9-n^3})$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (n+1) + (n+2) + \dots + 2n}{n+1} - n \right]$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2\sqrt{n}}{n+4} - n^2 \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt[3]{n+3} - \cos \sqrt[3]{n}) (1 + \cos n\pi)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{\sqrt[3]{2n^3-3}}{\sqrt[4]{8n^3+n}} = \cos^4(n!)$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4n^3}{5-4n^3} \right)^{n^2-1}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{2n^3+2}}{\sqrt[3]{2n^3+2+4}} \right)^n$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - n + 3}}{2n - \sqrt{4n^2 + n + 1}}$$

Вариант 14.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + \sqrt{n^3 + 4}}{n^3 - 4n + \sin(n+2)}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2-1)^2}{(\sqrt{n}-1)^4 (4\sqrt{n}-1)^4}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3-n^3} - \sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{2n^4+4} - \sqrt{n^3-1}}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27^n+2}}{4 \cdot 3^{n+2}+1}$ 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 4^{n-2} + 3^n}{\sqrt{1+2+4+\dots+2^n}}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^{4/3} - (n^2-3)^{2/3}]$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+3}} - \sqrt{2n} \right)$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{1+2+\dots+n} - \frac{2}{3} \right)$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[4]{n}+2} - \sqrt[4]{n} \right)$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{3+(-1)^n}{5-(-1)^n} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7n+6}}{5n+1}$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-1}{2n^2} \right)^{n^4}$ 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+3) (\sin \sqrt{n+3} - \sin \sqrt{n+4})$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+2}+3} \right)^{\sqrt{3n+2}}$ 15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{1-8n^3} + 2n}$

Вариант 15.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^8 - 9(-1)^n n^4 - 7}{4n^9 - 6^2 + 11}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(n+5)(4n-2)^4}{(3n-1)(2n-1)(1-7n)^4}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n^4-n^3}+5-4n}{3\sqrt[3]{2n^7-n^5}+4n}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n-3)!}{(n+2)!}$ 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 9^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}{3^{2n-1} + 7 \cdot 2^{n+2}}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+5^2+\dots+5^n}{1+2+2^2+\dots+2^n}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2n - \sqrt{4n^2+7n+2})$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{(n-6)^2} - \sqrt[3]{(n+6)^2} \right)$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2-3n+1} - \frac{n^2}{n+2} \right)$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+2n}{n+2} - 3n \right)$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{n} - \cos \sqrt{n+8}) \cos \sqrt{n}$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3\sqrt{n}}{6-3\sqrt{n}} \right)^{2n-1} \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+3n-1} \right)^n$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2\sqrt{n}} \right) \cos \left(\frac{n^4}{n^2+1} \right) \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt{9n^2+8}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}$$

Вариант 16.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^6 + 3n^5 + \sin n}{2n^6 - 5n^5 + 9} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3\sqrt{n}+2)^2(4n-1)}{2n^2-26n-4}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+3n}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{7n^6+2}} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n^2+1)n!} \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 7^{n+1}}{3 \cdot 7^{n-1} + 2^{n+4}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+7^{-1}+7^{-2}+\dots+7^{-n}}{1+11^{-1}+11^{-2}+\dots+11^{-n}} \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2})$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n(3n - \sqrt{9n^2+n}) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{2n^2+1}{2n+1} \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-4n}{2\sqrt{n}+3} + 2\sqrt{n} \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{2\sqrt{n}+1} - \sin \sqrt{2\sqrt{n}-1} \right) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3n-1}}{4n+1} \sin \frac{4-2n}{\sqrt{n+1}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - 2(3n^2-1)^{-1/2} \right]^{2n} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{6n+3}-2}{\sqrt{6n+3}} \right)^{\sqrt{n+1}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n^2-6} - \sqrt{n^2+6}}$$

Вариант 17.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^7 - 4n^5 + 33}{11n^7 - n^4 + 30 \cdot (-1)^n} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+4)^6(1-n^5)}{(5n+1)^{10}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{4n^8 + n^3} + \sqrt[3]{6n^5 + 2n^2}}{7n^2 + 3222n + 4668} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n+4)!}{((n+5)!)^2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n}{25^{n-1}} \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 5^{n-2}}{\sqrt{5^{2n-1}} + 3}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/3} \left(\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 - 5} \right) \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2 + 5n + 3} - \sqrt{3n} \right)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^4 + 1}{3n^2 + 1} - n^2 \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1 + 2 + 3 + \dots + 3n}}{n + 1} - n \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{n^2 + 2} - \cos n \right) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{4n^4 - n} + 2} \sin \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{n^2 + 3} + 3}{2\sqrt{n^2 + 3} + 1} \right)^{2n} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4\sqrt{2n-3}} \right)^{\sqrt{4n+1}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt{4n^2 + 4} - 2n}$$

Вариант 18.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^8 - 3n^5 + 1}{6n^9 + (-1)^n \cdot n^7 + 3} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^9 + 6n^9}{(3n+4)^6 (3-n)^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{8n^8 + n^6 + 2} - 3n^2 + 1}{7n^2 + 45n - 85} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+3)!)^3}{n!(n+1)!(n+2)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 \cdot 5^{n+2} - 3^{n-3})^2}{3 \cdot 25^{n-1} + 2^n} \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 \cdot 9^n} + 3}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n^3 - n} - \sqrt[3]{n^3 + n} \right) \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+8} \right)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{4n^4 + 3}}{2n + 7} - n \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5 - n^3}{n^2 + 2n + 5} - n^3 \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{3n^2 + 2} - \sin \sqrt{3}n) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - (-1)^n}{9 - (-1)^n} \arcsin \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \sqrt{n}}{7 - \sqrt{n}} \right)^{(1+n)/(1+\sqrt{n})}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{2n^2 + 1} \right)^{(n^2+3)/(n+1)}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt{9n^2 + 6} - 3n}$$

Вариант 19.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^8 + 7n^6 \cdot \sin n + 19}{7n^8 + 88n^6 + 98}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^4 + (6n+1)^4}{(6n+5)^4 + (3n+7)^4}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{3n^8 + 5} - 2n^2 + 7}{\sqrt{5n^4 - n^3 + 1} - n^2 + 2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)n!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 \cdot 9^{n-2} + 4}}{2^{n+2} + 3^{n-1}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^{n-2} + 2^{2n-1}}{1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n + \sqrt{11n}} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n^3 - n} - \sqrt[3]{n^3 + n} \right)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \frac{n}{\sqrt{n+4}} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 + 2 + \dots + 2n)^2}{n+4} - n^3 \right]$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt[3]{n^3 - 9} - \sin n)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \cos 5n}{4 + \sin n} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n+2} + 1}{\sqrt[4]{6n^5 + 2}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{7n+1}}{4 + \sqrt{7n+1}} \right)^{2\sqrt{n}}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n}{n^2 + 3n + 1} \right)^{2n^2} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n-2}}{n - \sqrt[3]{n^3 + 2}}$$

Вариант 20.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3n)^3 + (1+2n)^4}{(1-3n)^3 - (1+3n)^4} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^3}{(2\sqrt{n}-1)^4(\sqrt{n}-7)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 + n} - 6\sqrt[4]{n^4 + 3}}{\sqrt[3]{n^3 + 7} + 3\sqrt[4]{n^4 + 3}} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!(n-3)!}{[(n+2)!]^2} \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{7^{3n-1}} + 3^{3n}}{3^n + 4 \cdot 7^{n+1}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+3+3^2+\dots+3^{2n}} + 2^n}{6 \cdot 3^{n+2} + 7 \cdot 2^{n-1}} \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4+7)} - \sqrt{n^5-7} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n + \sqrt[3]{n-8n^3} \right) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (n+1) + (n+2) + \dots + 6n}{n+2} - n \right]$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - \sqrt{n}}{n+5} - n^2 \right) \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt[3]{n^2-7} - \sin \sqrt[3]{n^2} \right) (1 + (-1)^n)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{\sqrt[3]{9n^5-2}}{\sqrt[6]{8n^7+n}} \cos^7(n!) \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-5n^3}{2-5n^3} \right)^{n^3+2}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt[3]{n^3+4}}{2\sqrt[3]{n^3+4}+1} \right)^{2n} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-5n+1} - 3n}{2n - \sqrt{4n^2+8n+1}}$$

Вариант 21.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n+1)(n-2)(2n+3)^3}{(3n-1)(n+3)(5n-2)^3} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)^2}{(\sqrt{2n}-1)^2(3\sqrt[3]{n}-1)^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n+1} + \sqrt{2n-2})^2}{3n-2} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+2)! - (n+3)!}{(n+4)!}$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1} + 2^{2n-1}}{5 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{2n+1}}$ 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2(n-1)}{n^2} \right)$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n + \sqrt{n+2}} \right)$ 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{16n^2 + 7n + 1} - 4n \right)$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+2} - \frac{2n-1}{2} \right)$ 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - n}{3n-2} + \frac{6n^3 + 1}{1-9n^2} \right)$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{6 + \cos n}{3 - (-1)^n} \sin \frac{\sqrt{3n+6}}{2n+5}$ 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 4}{n^3 - 3} \right)^{n-2n^3}$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) \cos \frac{\pi n}{2}$ 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+5} + 1}{\sqrt{n+5} + 3} \right)^{\sqrt{2n+3}}$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 3}}{\sqrt[3]{1 - n^3} + n}$

Вариант 22.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{13} - 3(-1)^n n^{12} - 8}{5n^{13} - 12n^{10} + 1213}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-5)(2n+4)(4n-6)^3}{(3n-1)(2n-4)(1-6n)^3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{5n^4 - 2n^2 + 4} - n}{2\sqrt[3]{2n^7 - n^3 - 9n^2} - 2}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{[(n)!]^2}$ 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 9^{n+1} - 5 \cdot 2^{n-1}}{3^{2n+2} + 3 \cdot 2^{n+3}}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+6+6^2+\dots+6^n}{1+4+4^2+\dots+4^n}$ 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(n - \sqrt{n^2 + 4n + 9} \right)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{(n-5)^2} - \sqrt[3]{(n+5)^2} \right)$ 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + n}{n^2 - 4n + 1} - \frac{n^2}{n+1} \right)$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+4n}{n+2} - n \right)$ 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos n - \cos \sqrt{n^2 + 12} \right)$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3\sqrt{n}}{5-3\sqrt{n}} \right)^{2n-1} \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+3n-1} \right)^{2n}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{n+9}}{n+4\sqrt{n}} \right) \cos \left(\frac{n^5+1}{n^2+2} \right) \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$$

Вариант 23.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^8 + n^3 \cdot \sin 3n + 87}{3n^7 + 8n^6 + 99} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-5\sqrt{n})^2(2n-7)^3}{n^4 + 67n^3 - 318}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+4n}{\sqrt{n^4+3}+\sqrt[3]{4n^6-2}} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2n-1)n!} \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14^{n+1}}{3 \cdot 7^{2n-1} + 5^n}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n}}{1+10^{-1}+10^{-2}+\dots+10^{-n}} \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n-\sqrt{n}} - \sqrt[3]{n+\sqrt{n}} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(2n - \sqrt{4n^2+n} \right) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{7n^2+n}{7n+1} \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-5n}{\sqrt{5n+2}} + \sqrt{5n} \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{9n^2+1} - \sin \sqrt{9n^2-1} \right) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n}} \cos \frac{3n}{\sqrt{n+3}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - 3(2n^2-1)^{-1/2} \right]^{3n} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3n-3}}{\sqrt{3n+5}} \right)^{\sqrt{2n+4}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n^2+2n-5} - \sqrt{n^2+2n+5}}$$

Вариант 24.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^9 - n^5 + 39n^4}{4n^9 - 7n^4 \cdot \cos 9n + 2} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+4)^7(1-2n^2)^2}{(4n+1)^{10} + 2n^{10}}$$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^8 + n^3} + 3\sqrt[5]{6n^5 + 2}}{7n^2 + 82n + 2968}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-6)!(n-4)!}{((n-5)!)^2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2n}}{25^{n-2}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} - 5^{n-2}}{\sqrt{7 \cdot 5^{2n-1}} + 2 + 3 \cdot 5^{n-1}}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{4/3} \left(\sqrt[3]{n^2 - 13} - \sqrt[3]{n^2 + 13} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n} - \sqrt{5n^2 + 6n + 1})$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \frac{2n^4 + 1}{2n^2 + 3} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{\sqrt{1 + 2 + 3 + \dots + 3n}}{n + 4} \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{n^{3/2} - 1} - \sin \sqrt{n^{3/2} + 1} \right) (1 + \sin n^6)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n+3} - 5}{\sqrt[3]{n^5 - 1} + 2} \cos \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{3n}}{\sqrt[3]{5n^2 + 2}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2 + 3}}{\sqrt{n^2 + 2 + 1}} \right)^{3n}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{7\sqrt{6n-1}} \right)^{\sqrt{2n+1}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 2}}{\sqrt{n^2 + 3} - n}$$

Вариант 25.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 - \sin(n+1)}{2n^4 + 13n^2 + 23}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^9}{(3n^2 + 2)^3 (3 - 2n)^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{5n^8 - n^6 + 2} - 2n^2}{5n^3 + 54n - 38}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+3)!)^3}{[n!]^2 (n+2)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 5^{n+1} + 3^{n-2})^2}{6 \cdot 25^{n-1} + 4^n}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 \cdot 9^{n+2} + 3} - 4 \cdot 3^{n-1}}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+3} \left(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+8} \right)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{9n^4 + 2}}{3n+1} - n \right) \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5 - n^4 + 2}{n^2 + 2n + 2} - n^3 \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{n^3 - n} - \cos \sqrt{n^3 + n} \right) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + (-1)^n}{2 + (-1)^n} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - \sqrt{n}}{2 - \sqrt{n}} \right)^{(1-n)(1-\sqrt{n})} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 4} \right)^{(n^2+1)(2n+1)} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt[3]{n^3 + 7}}{\sqrt{n^2 + 8} - n}$$

Вариант 26.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^7 - 27n^5 + 5}{4n^8 + 4n^5 \sin(n!) + 8} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2n)^4 \cdot (7n+1)^5 - 3n^5}{(1+7n)^4 \cdot (3n+6)^5}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{3n^8 + 1} - 4n^2 + 7}{4\sqrt{2n^4 - n^3 + 2} + n^2} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + n!}{(n-4)n!} \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 \cdot 9^{n-1}} + 4}{2^{n+2} + 3^n}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 5^{n-3} - 2^{2n}}{1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n} \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n + \sqrt{17n}} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n-n^3} + \sqrt[3]{n+n^3} \right) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+2+\dots+2n)^2}{n+3} - n^3 \right] \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt[3]{n^2 - 18} - \cos \sqrt[3]{n^2} \right)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \cos 4n}{3 - \cos 8n} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n+3} + n}{\sqrt[4]{n^7 + 1}} \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3n+1}}{5 + \sqrt{3n+1}} \right)^{4\sqrt{n}}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n}{2n^2 + 4n + 1} \right)^{5n^2} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+1} - \sqrt{5n-1}}{n - \sqrt[3]{n^3 + 7}}$$

Вариант 27.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3n)^3 + (1+3n)^4}{(1-2n)^3 - (1+2n)^4}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^2}{(2\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}-7)^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2-3n^3} - 5\sqrt[4]{n^4+2}}{\sqrt[3]{n^3+n} + 4\sqrt[4]{n^4+1}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n-2)!}{(n+2)!(n-1)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 7^{3n-1}} + 2}{2^n - 5 \cdot 7^{n+2}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+5+5^2+\dots+5^{2n}} + 2^n}{6 \cdot 3^{n+1} + 7 \cdot 5^{n+1}}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4+9)} - \sqrt{n^5-9} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n + \sqrt[3]{19-8n^3} \right)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (n+1) + (n+2) + \dots + 5n}{n-2} - n \right]$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3\sqrt{n}}{n+2} - n^2 \right)$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt[3]{3n^2-7} - \sin \sqrt[3]{3n^2} \right) \sin \frac{\pi n}{2}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{3n^6-5}}{\sqrt[6]{4n^7+n}} \sin^5(n!) \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6-2n^3}{8-2n^3} \right)^{n^3+2}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{2n^3+3}}{\sqrt[3]{2n^3+3+1}} \right)^{2n}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-n+4} - n}{3n - \sqrt{9n^2+n+1}}$$

Вариант 28.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^3(n-9)(6n+1)}{(4n^2-1)(5n-2)^3}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 - 5\sqrt{n+2}}{(\sqrt{6n}-1)^2(\sqrt{2n}-1)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{3n+7})^2}{1-4n}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+1)! + (n+3)!}{(n+4)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 7^{n+1} - 4 \cdot 5^{n+2}}{2 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^{n-1}} \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n + \sqrt{n+3}} \right) \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + n + 1} - 3n \right)$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+2} - \frac{2n+1}{2} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + n}{6n-1} + \frac{6n^3 + 1}{1-9n^2} \right) \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{3n^2 + 1}{3n+2} \sin \frac{\sqrt{n+6}}{3n+5}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2}{n^3 - 4} \right)^{n-n^3} \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3 + 2}) \sin \frac{\pi n}{2}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+3} + 1}{\sqrt{n+3} + 4} \right)^{\sqrt{n+5}} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 - 4n - 1}}{\sqrt[3]{1 - n^3} + n}$$

Вариант 29.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^9 - n \cdot \sin 9n - 99}{4n^5 + n^6 + (-1)^n} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8 + 3\sqrt{n})^4 (9n - 5)}{2n^3 + 7n - 319}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+3n}{\sqrt{n^4 + 8} + \sqrt[3]{2n^6 - 5}} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n-3)^2 n!} \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14^{n-1}}{2 \cdot 7^{2n+3} - 6^{n+4}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+9^{-1}+9^{-2}+\dots+9^{-n}}{1+11^{-1}+11^{-2}+\dots+11^{-n}} \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{n^2 - 6} - \sqrt[3]{n^2 + 6} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(3n - \sqrt{9n^2 + n} \right) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{n^2 - 2}{n + \sqrt{n}} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3n}{\sqrt{3n+1}} + \sqrt{3n} \right)$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - 7(5n^2 - 1)^{-1/2}]^{6n} \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5n+3}}{\sqrt{5n+5}} \right)^{\sqrt{3n+4}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n-5}}{\sqrt{n^2+n-9} - \sqrt{n^2+n+9}}$$

Вариант 30.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^{13} - 2(-1)^n n^{12} - 7}{5n^{13} - 9n^7 + 1777} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-5)(n+9)(5-6n)^3}{(4n-1)(n-4)(1+8n)^3 - 2n^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{7n^4 - n^2 + 7} - 6n}{2 \cdot \sqrt[7]{1 - 2n^7} - 5n - 5} \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n-1)!}{(n+1)!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^{n+2} - 7 \cdot 5^{n-1}}{3^{2n-1} + 9 \cdot 2^{n+3}} \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 8 + 8^2 + \dots + 8^n}{1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+2) \left(7n - \sqrt{49n^2 + n + 3} \right)$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{(3n-1)^2} - \sqrt[3]{(3n+1)^2} \right) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + n^2}{n^2 - 3n + 1} - \frac{n^2}{n+2} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+2n}{4n+1} - \frac{n}{3} \right) \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{n^3} - \cos \sqrt{n^3 + 29} \right)$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3\sqrt{n}}{7 - 3\sqrt{n}} \right)^{5n-1} \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 2n^2}{3 - n - 2n^2} \right)^{5n}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n+3}}{5\sqrt{n-n}} \right) \cos(2n+n!) \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n+6} - \sqrt{n+2}}$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ

«ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ» (приложение 3).

Вариант 1.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - x - 2} - \frac{2}{3x^2 - 6x} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 5x}{\sin x \sin 7x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -4} (13 + 3x)^{x/(x^2 - 16)} \quad 9. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + 2 \cos x)^{3/\cos x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{1/x \sin \pi x} \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x - \sin 4x) \operatorname{ctg} 9x$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \operatorname{tg} 3x \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x + 5x^2)}{\sin(6x + 3x^2)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x - 3)}{\operatorname{tg}^2(5x - 5)}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x + x^2) + \operatorname{arctg}^2 5x}{x \sin 7x \operatorname{tg} 4x^2}$$

Вариант 2.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3-x} - \frac{6}{x^2 - 9} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sin \pi x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 4} - 2}{\sin 5x + \sin 3x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 5x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\operatorname{ctg}^2 6x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} \right)^{2/(x-3)} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{1/(x-2)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 9x - \cos 3x) \operatorname{ctg}^2 4x \quad 12. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg}(3\pi x/2)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{4x}}{\sin 8x - \sin 5x} \quad 14. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2^{\cos x} - 1}{\sin 2x} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 5x)}{\arcsin(4x + 2x^2)}$$

Вариант 3.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x+15} - 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{tg^2 4x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3tg5x} - \sqrt{1-3tg5x}}{\sin 5x + \sin 7x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1-tgx}{\cos 2x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{3/\sin 5x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 7} (2x-13)^{1/(7x^2-x^3)} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{ctg(1-x)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x[ctg(1/2x) + ctg(1/6x)] \quad 12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{ctgx}{x} \right)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x+6x^2} - 1}{e^{\sin 3x} - 1 + 3tg2x} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9-2x^2)}{\sin^2 \pi x} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

Вариант 4.

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x^2 + 5x + 6} - \frac{1}{x+2} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin 6x}{\sqrt{4 + \sin 7x \sin 3x} - \sqrt{4 - \sin 7x \sin 3x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{tg \pi x}{x^2 - 4} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sin x}{\sin 4} \right)^{3/(x-4)} \quad 9. \lim_{x \rightarrow -2} (9+4x)^{3/(x^3+8)}$$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x + \sin 5x)^{1/\sin 4x}$ 11. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \lg(1/2x) - \lg(1/5x)$
12. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \lg 3x \lg(x - \pi/2)$ 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 7x}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{\sqrt{x-2}-1}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin 3x} - \sqrt[4]{1-\lg 4x}}{\arcsin(2x^2 + 3x)}$

Вариант 5.

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{2}{3x^2 + 6x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos 4x - \cos 7x}{\sin x \sin 9x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{1 - \cos x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-2x}{3+2x} \right)^{2/\ln 3x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin 3x)^{1/2x}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 3x - \cos 2x)^{e^{2/x}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \pi} x^2 [\cos(5/x) - \cos(8/x)]$ 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \lg 4\pi x \cdot \operatorname{ctg} 5\pi x$

Вариант 6.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^2 - 1 - 3x}{x + x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{2+x} - \frac{3}{8+x^3} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 7x}{x \sin 4x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x \lg 6x}{1 - \sqrt{\cos 7x}}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\lg^2 \pi x}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{1/(x-1)}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\cos(1/x) + 3 \sin(1/x)]^x$ 10. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{2x/(x^2-4)}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos^2 6x) \operatorname{ctg}^2 3x$ 12. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt{x}) \lg(\pi x/2)$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2(3x)}{\arcsin(4x^3) - \sin 5x}$ 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$ 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 5^x}{\sqrt{1 + \operatorname{arctg} 4x} - 1}$

Вариант 7.

1. $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{8x^3 + 1}{6x^2 + 5x + 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x} + 1 - 1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2 - \sqrt[4]{x+14}}$
4. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 5x - 1}{1 - \sqrt{\cos 4x}}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\lg(x-3)}{x^2 - 9}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{\sqrt{10-x} - 3}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5+4x}{5-2x} \right)^{1/2x}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{1/x \ln \pi x}$
10. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\lg x)^{e^{2x}}$ 11. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \lg 5x$ 12. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \operatorname{ctg} 2\pi x$
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt[3]{x}-1}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg(5^{x^2-1}-1)}{\ln x}$ 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x + 3x^2) - 5x^2}{\sqrt{1 - \sin(3x + 2x^2)} - 1}$

Вариант 8.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x + 2}{x^6 - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\lg x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos x} - 1}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg^3 7x}{x(\cos 3x - \cos x)}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\cos 4}{\cos x} \right)^{2/(x-4)}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{1/(1-\cos 4x)}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 6} (7-x)^{(1+x)/(x^2-5x-6)}$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1/2} \sin(1-2x) \operatorname{tg} \pi x \quad 12. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (2x - \pi/2) \operatorname{ctg}(x - \pi/4)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+3x+4x^2)}{\sin \sqrt{2x} \cdot (2^{\sqrt{3x}} - 1)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln \cos \frac{\pi}{x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x + 2 \operatorname{arctg}^2 5x}{x \sin 8x - 3 \operatorname{tg} 11x}$$

Вариант 9.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 + 2x + 2}{x^4 - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[4]{x-2} - 1}{\sqrt{x-2} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{6}{x^2-9} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - 1}{\cos x - \cos 5x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 9} - 3}{\sin 8x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2+x) - \sin(2-x)}{\operatorname{tg}(2+x) - \operatorname{tg}(2-x)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\cos 8}{\cos x} \right)^{1/(8-x)} \quad 9. \lim_{x \rightarrow -5} (6+x)^{(x+1)/(x^2-25)}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} (\cos \pi x)^{\operatorname{ctg}(x-2)} \quad 11. \lim_{x \rightarrow \pi/8} \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{ctg}(\pi/4 + 2x)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(\pi/x) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 6x}{\ln \cos 11x} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sqrt{2-x} - 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 4x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2}$$

Вариант 10.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + 2x - 2}{x^4 - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13} - \sqrt{x+22}} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3}{1+x^3} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x \sin 3x}{\sqrt{3x^2 + 4} - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3+4x) - \sin(3-4x)}{\sin 3x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\cos(x - 2\pi/3)}{\pi - 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \lg^2(3\sqrt{x}))^{3/5x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{5x/(x^2-1)} \quad 10. \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{9+2x}{3} \right)^{\lg(\pi x/6)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt[3]{x}) \lg(\pi x/2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3^x \sin(2/3^x) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 5x}{e^{7x} - e^x} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 4x} - 1}{3x + \arcsin x^2}$$

вариант 11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt[5]{x}}{2 - \sqrt[3]{8-x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - x - 2} - \frac{2}{3x^2 - 6x} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\cos^3 3x - 1} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} \cos x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (\cos(\sqrt{3x}))^{4/x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{1/(x^2 - 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x \sin 8x} \quad 11. \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x - \sin 4x) \operatorname{ctg} 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 4x) + x^2} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\arcsin(2^{x-1} - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (25x - 13) \ln \frac{3x - 11}{3x + 14}$$

вариант 12.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{2x^4 - x^2 - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - 2x} + 1}{x + \sqrt[3]{x} - 2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1+x^3} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x \sin 6x}{1 - \cos^3 8x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\lg x - \sin x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\lg 5x}{\lg 3x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{\sin 9}{\sin x} \right)^{4(9-x)} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 4} (2x-7)^{1/(x^2-3x-4)}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} (2-x/3)^{\arctan(x/3)} \quad 11. \lim_{x \rightarrow 7} \sin[(x-7)/2] \lg(\pi x/14)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 [1 - \cos(2/x)] \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \lg(x^2+x)}{\ln(1+5x-2x^2)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x-\pi)^2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\sin 4x) \cdot \lg^4 2x}{\arctan^6 9x}$$

Вариант 13.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+3}{x^4-1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{9+2x}-5} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x}-1-1}{\sqrt[3]{x}-1-1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{4}{1-x^4} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(5x)}{\sin(x^2)} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x \sin^2 x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{2/\ln 8x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow \infty} [\cos(3/x)]^x$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -2} (3x+7)^{2/(x^2-4)} \quad 11. \lim_{x \rightarrow 1} (1-\sqrt[3]{x}) \lg(\pi x/2)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \lg(3/2^x) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x + 2x^2}{\arctan \lg(2x+x^2)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+\lg 6x)}{\sin 5x \cdot (3^{6x} - 1)}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x-5)}{e^{x^2-4}-1}$$

Вариант 14.

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2-17x-15}{9x^2-52x+35} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{2x^2+x+4}-2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{6}{x^2-9} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5+x) - \sin(5-x)}{\lg(5+x) - \lg(5-x)} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2}{1 - \sqrt[3]{\cos 5x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin 4x}{\sin 6x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4+3x}{4-3x} \right)^{1/\ln 7x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/3 \ln x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} (9-4x)^{1/(x^2-4)} \quad 11. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 [\cos(1/5x) - \cos(1/7x)]$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1/2} (1 + \cos 2\pi x) \operatorname{ctg}^2 6\pi x \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \arctan 5x^2}{4x - \arcsin 3x^2} \quad 14. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \lg x}{\cos 2x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x - 2 \sin^3 x}{\ln(1-2 \arcsin 2x)}$$

Вариант 15.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-18x^2+81}{x^4-81} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+5x^2}}{\sqrt{1-7x}-1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{1+x^3} - \frac{4}{1-x^4} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos x - \cos 3}{\sin x - \sin 3} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x \lg 3x}{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{2}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+4x}{3-x} \right)^{4/7x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin 4x)^{2/x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\arctan(x/2)} \quad 11. \lim_{x \rightarrow 5} \sin \left(\frac{x-5}{2} \right) \lg \left(\frac{\pi x}{10} \right)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - \cos(5/x)) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+\lg 8x)}{\sqrt{1-\sin 3x^2}-1} \quad 14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x + \ln(1+3x^2)}{\sqrt[3]{\lg 4x} \cdot \sin^2 7x}$$

Вариант 16.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 5}{2x^3 + 5x - 7}$
- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{2 \ln^2 x + \ln x - 1}{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt[3]{3-x^3})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 8x \operatorname{tg} 9x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \operatorname{tg} 13x}{\sqrt[3]{5x^2 - 1} + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{\operatorname{tg} 2x - 1}{\pi - 8x}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\cos x}{\cos 9} \right)^{3 \sqrt[3]{x-3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} (x/3)^{5 \sqrt[3]{x-3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x + \sin 9x)^{1/\sin 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\operatorname{tg}(1/x) - \operatorname{tg}(3/x))$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2x^2 - x + 4} - 2) \cdot \operatorname{ctg} \pi x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \operatorname{arctg} 6x}{\sqrt{1+7x} + \operatorname{tg} x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(2^{x-1} - 1)}{\ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 6x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

Вариант 17.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{3x^2 - 5x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 26x + 5}{\sqrt{2x} - \sqrt{x} + 5}$
- $\lim_{x \rightarrow 3\pi/4} \frac{1 + \operatorname{ctg}^3 x}{2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+3)(x+5)} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 6x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+5\sin 3x} - \sqrt{2-5\sin 3x}}{\operatorname{tg} 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 8x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{2/\sin 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 6x^2)^{1/(1 - \cos 7x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2+4x}{2-3x} \right)^{1/\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \sin \left(\frac{x-3}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{6} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(6^{5/\sin 2x} - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 14x + 50} - 1}{\ln(x-6)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+6^x)}{\ln(1+7^x)}$

Вариант 18.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x - 6}{x^4 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x + 2}{\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3x + 7})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6+4x) - \sin(6-4x)}{\sin 5x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{7 - \sqrt{5x^2 + 2x} + 49}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^{2/3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\operatorname{arctg} x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{2 + 2\sqrt{x}} \right)^{1/x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 3x - \cos x)^{1/\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{tg}((x-4)/2) \cdot \operatorname{tg}(\pi x/8)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [1 - \cos^3(3/x)]$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x + \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\ln(1 + 5\sqrt{x})}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5^x - 7^x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+3) - \ln(x-3))$

Вариант 19.

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 + 2x + 2}{x^2 + 3x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{2x + 3x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^2 x + 2 \sin x + 1}{2 \sin^2 x - \sin x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 7x + 3} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \sin 9x}{\sqrt{2 - \sin^2 4x} - \sqrt{2 + \sin^2 4x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 5x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 6x)^{\operatorname{arctg} x}$

$$9. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{4 + \sqrt{x}}{4 - 2\sqrt{x}} \right)^{1/\sqrt{x+2}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x / \cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 [\cos(6/x) - \cos(3/x)] \quad 12. \lim_{x \rightarrow 1} (2 - \sqrt{5-x}) \operatorname{ctg} 3\pi x$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - 2 \operatorname{arctg} x^3}{\arcsin 4x \cdot \sin(5x/2)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{5^x - 25} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+2 \operatorname{ctg}^2 5x} - 1}{x \cdot \operatorname{arctg}(2x) + 4x^3}$$

Вариант 20.

$$1. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^3 - 343} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[3]{1-2x}}{3x + 4x^2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x - 1}{2 \ln^2 x - \ln x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -0} (\sqrt[3]{2x^3 + 4} + \sqrt[3]{3-2x^3}) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(3x/2)}{\sin(7x^2)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+4 \operatorname{ctg} 6x} - \sqrt{3-4 \operatorname{ctg} 6x}}{\sin 9x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{\sin 2x} - 1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} - 1} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-x}{3+x} \right)^{4 \operatorname{ctg} 3x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x}{2+5x} \right)^{1/(2x^2-4x)} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x + \sin 6x)^{1/\sin 4x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x [\operatorname{tg}(1/x) + \operatorname{tg}(1/5x)] \quad 12. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (2x \cdot \operatorname{tg} x - \pi / \cos x)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x - 4x^3}{\arcsin(8x + 3x^2)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{3x} - e^9}{\arcsin(x-3)} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2^x - 3^x}{7^x - 5^x}$$

Вариант 21.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 5x - 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{9+4x} + 4x^2 - 3} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{6 \operatorname{ctg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 1}{7 \operatorname{tg}^2 x - 10 \operatorname{ctg} x + 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 2x - 3} + 3x) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin 11x}{\cos 5x + \cos 8x - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 8x}{1 - \sqrt[3]{\cos 14x}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{3 + 2\sqrt{x}} \right)^{1/\sqrt{2x^2+5x}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin 4x)^{1/x} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 4} (\cos 2x / \cos 8)^{1/(x-4)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^4 3x - 1) \operatorname{ctg}^2 6x \quad 12. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \operatorname{tg}(7/2^x) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 3x}{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 9x)}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 3x + 2e^{2x} - 1}{\ln(1 + \arcsin 3x^2)}$$

Вариант 22.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{8x^2 + 1}{2x^2 + 11x + 5} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1/e} \frac{6 \ln^2 x + 5 \ln x - 1}{\ln^4 x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 7} + 2x) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \operatorname{tg} 7x}{\sqrt{\cos 5x} - 1} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{36x^2 - \pi^2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sin x - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}(x/2) \operatorname{tg} 8x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sin 6}{\sin x} \right)^{3/(x-6)} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 7x)^{4/x^2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+2x}{4-x} \right)^{\frac{1}{1-x^2}} \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x - \cos x) \operatorname{ctg}(\pi x/2)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{ctg}(5\pi x) \cdot \operatorname{tg}(7\pi x) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x + x^2}{e^{x^2} - 1} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{4x^2 + 2x - 6}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x + 6x^2}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 4x} \cdot \sin^3 5x}$$

Вариант 23.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{(2x^2 - x - 1)^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2}} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{3 + 10 \sin x - 8 \sin^2 x}{3 - 11 \sin x + 6 \sin^2 x}$$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt[3]{x - x^3})$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 8x}{1 - \sqrt{\cos 9x}}$
7. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x + \pi/3)}{1 - 8 \cos^3 x}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + 5x}{2 - x} \right)^{4/\sin 3x}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 4x)^{(x^2+1)/(x^2-1)}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 3x + \cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 8x}$ 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)[\ln(x + 3) - \ln x]$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - \sqrt{10 - x}) \cdot \operatorname{ctg}^2 \pi x$ 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x + \ln(1 - 2 \sin^2 x)}{\sqrt{1 + 6x + 5x^2} - 1}$
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(\ln x + 1)}$ 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x^2 - 2 \operatorname{tg}^3 2x}{\ln(1 + 5 \arcsin^2 4x)}$

Вариант 24.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x^6 - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt[3]{5+x} - 2}$ 3. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x + \ln x - 2}{\ln^3 x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x)$ 5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + 5 \sin 4x} - \sqrt{2 - 5 \sin 4x}}{8x + 3x^2}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + x \sin x} - 1}{x \sin(x/2)}$
8. $\lim_{x \rightarrow +0} (\cos(\sqrt{13x}))^{4/x}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{2x/(1-x)}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{1/\sin^3 x}$ 11. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \cos 2x \cdot \operatorname{tg}(x + \pi/4)$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2x+1}{2x+3}$ 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(5^{3/x} - 1)$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 4x - 3 \operatorname{tg}^2 x^2}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 2 \operatorname{arctg} 4x} - 1}{\sqrt{1 + 3 \arcsin 2x} - 1}$

Вариант 25.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{2x^2 + 5x - 7}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{5+3x}}{x^2 - 11x + 18}$
3. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2tg^3 x - 2tg^2 x + tg x - 1}{tg^3 x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 + 2x + 3})$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(3+4x) - tg(3-4x)}{\sin 5x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 8x - tg 3x}{4 - \sqrt{2x^2 + 5x + 16}}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{tg(\pi x)}{\sin(\pi x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{ctg^2 9x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{x/(1-x)}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg 9x - tg 8x)^{1/\sin 6x}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \sqrt{2x^2 + 3x + 4}) ctg 3x$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} tg(3\pi x) ctg(5\pi x)$
13. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(2\sqrt[4]{x}) + 2\sqrt{x}}{\ln(1 + 3\sqrt[4]{x}) - 5\sqrt{x}}$
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{x^2-4} - 1}{tg \ln(x/2)}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x) + e^{tg^7 x} - 1}{2^{\sin 5x} - 1}$

Вариант 26.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 + 5x - 6}$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin^2 x - 5 \sin x - 6}{\sin^3 x + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg x - tg 3x}{\sin 4x \sin 9x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin \sqrt{x} - \sin \sqrt{7}}{2x - 14}$
7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{tg^2 2x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2x^2}{2 + x + 3x^2} \right)^{1/4x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{1/(x \sin 9x)}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\cos 9x}) \cdot ctg 2x \cdot ctg 5x$
12. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \cos 2x \cdot tg(x + \pi/4)$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x^3 + tg^2 5x^2}{\arcsin^2 4x \cdot \sin(3x/7)}$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1 + \cos \pi x} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg}^2 x - \sin x}$$

Вариант 27.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 5x + 4}{x^4 - 1} \quad & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 5x - x^2} - 2}{\sqrt[3]{2x^2 + x^3}} \quad & 3. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x + \cos x - 1} \\ 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + 3} + \sqrt[3]{2 - x^3}) \quad & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2 + 2x) - \cos(2 + x)}{x^2} \\ 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + 3\operatorname{tg} 4x} - \sqrt{2 - 3\operatorname{tg} 7x}}{\sin 13x} \quad & 7. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(\pi/6 - x)}{1 - 2\sin x} \quad & 8. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{4\operatorname{ctg} 3x} \\ 9. \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(4/x))^x \quad & 10. \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 - x} - x)^{1/3x} \\ 11. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 6x) \sqrt{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 7x} \quad & 12. \lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \cos 3x) \operatorname{ctg}^2 5x \\ 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg}(3x - 7x^2)}{\arcsin^2(9x + 2x^2) + 2\operatorname{tg}^3 x} \quad & 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 4x^2)}{3\arcsin 9x - 1} \\ 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{(e^{\sin 5x} - 1)^2} \end{aligned}$$

Вариант 28.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - 2}{x^2 - 8x + 7} \quad & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 - 4x} - \sqrt{3 + 4x}}{\sqrt{1 + 2x} - 1} \\ 3. \lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{4\operatorname{tg}^3 x + 4\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + 2} \quad & 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 - 5x - 1} + 2x) \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x \operatorname{tg} 9x}{\cos 8x - \cos 3x} \quad & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 5x}{1 - \sqrt[3]{\cos 4x}} \quad & 7. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{\sqrt{2} \cos x - 1} \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +0} [1 - \operatorname{tg}^2(3\sqrt{x})]^{3/x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{5 + \sqrt{x}}{5 + 2\sqrt{x}} \right)^{1/\sqrt{2x+x^3}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1/3} (\sin 6x / \sin 2)^{1/(x-1/3)} \quad 11. \lim_{x \rightarrow -5} \operatorname{tg} \frac{x+5}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{10}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \operatorname{tg}(3 \cdot 2^{-x}) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \arcsin 5x}{\operatorname{arctg}^3 6x + 2x^4} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 4x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{arctg} 6x)}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos \pi x} - 1}$$

Вариант 29.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{16x^2 - 10x + 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{3 - \sqrt{1 + 2x}} \quad 3. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^3 x + 2 \ln x - 3}{\ln^4 x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{9x^2 + x} + 3x) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3+4x) - \operatorname{tg}(3-4x)}{\sin(5+2x) - \sin(5-2x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 5x}{\sqrt{3x+5} - \sqrt{5}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi + 4x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg} 2x / \sin 7x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 + 5 \sin 7x}{3 - \sin 7x} \right)^{1/8x} \quad 10. \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{x/(x^2-1)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 5x - \cos 9x} \cdot \operatorname{ctg} 2x \quad 12. \lim_{x \rightarrow -2} \sin \frac{x+2}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 x - 1}{\operatorname{arctg}(2x - \pi)} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 6x)} \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sqrt[6]{1-x^7} - 1}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 4x} \cdot \sin^3 6x}$$

Вариант 30.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 5x + 2}{5 + 4x - x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x+x^3} - 1}{2 - \sqrt[3]{8-x}}$$

3. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{8\sin^3 x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1}$ 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt[3]{6 - 27x^3})$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos x}{1 - \cos^3 7x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x \cdot \sin 2x}{1 - \sqrt{\cos 9x}}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+3x}{5-x} \right)^{\frac{1}{x^2+x-2}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{\pi}{4} x \right)^{\operatorname{ctg} 3x}$ 10. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{6 - \sqrt{3x}}{6 + \sqrt{2x}} \right)^{1/\sqrt{4x+2x^2}}$
11. $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{5x - 7x^2} \cdot \operatorname{ctg}(\sqrt{6x})$ 12. $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \cos 2x \cdot \operatorname{tg}(x - \pi/4)$
13. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{tg} 9x \cdot \arcsin^2 \sqrt{3x}}{\sqrt{1 + \sin 5x^2} - 1}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{e^{\sin 2x} - 1}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1 - \sin 3x}{\ln(1+x) + e^{\operatorname{tg}^4 x} - 1}$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА НА ТЕМУ «НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ».

Исследовать на непрерывность функции (приложение 4).

Вариант 1.

1. $f(x) = \frac{\sin 3x}{2x} + \frac{x-1}{x^2-4}$ 2. $f(x) = (1+2x)^{2/x} + \frac{1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}, f(0) = 7$
3. $f(x) = 0, x < -\pi; \sin x, -\pi < x < 0; \pi, x \geq 0$ 4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x-3}$
5. $f(x) = 2^{x/(1-x)}$

Вариант 2.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} + \frac{x+3}{x^2-16} \quad 2. f(x) = (1+5x)^{3/x} + \frac{x+6}{x^3-8}, f(0) = 0$$

$$3. f(x) = \frac{|x+5|}{x+5} - \frac{5}{x} \quad 4. f(x) = \frac{2^{1/x} + 3^{1/x}}{2^{1/x} - 3^{1/x}} \quad 5. f(x) = e^{2x+1/x}$$

Вариант 3.

$$1. f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+x} \quad 2. f(x) = \left(\frac{\cos x}{\cos 1} \right)^{1/(x-1)} - \frac{x^2+2x}{x^2-4}, f(1) = -2$$

$$3. f(x) = x+1, x < 0; (x+1)^2, 0 < x \leq 2; 4-x, x > 2 \quad 4. f(x) = \frac{1}{1+3^{1/(x-2)}}$$

$$5. f(x) = x^2 e^{-1/x}$$

Вариант 4.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} + \frac{x+3}{x^2+x-6}$$

$$2. f(x) = \frac{\sin 7x}{x} + \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}, f(0) = -13. \quad f(x) = \frac{|x+4|}{x+4} - \frac{4}{x}$$

$$4. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-6} \quad 5. f(x) = \sin 2^{1/(x-3)}$$

Вариант 5.

$$1. f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} + \frac{x+4}{x^3-8} \quad 2. f(x) = (1-3x)^{4/x} + \frac{1}{x^4-625}, f(0) = 1$$

$$3. f(x) = -x, x < 0; x^3, 0 \leq x < 2; 3, x > 2 \quad 4. f(x) = \frac{2}{1-2^{2x/(1-x)}}$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x \cdot 5^{1/x}}$$

Вариант 6.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{4-2x}-2}{x} - \frac{x+3}{x^4-1} \quad 2. f(x) = \left(\frac{\sin x}{\sin 1} \right) + \frac{x}{x^2-4}, f(1)=1$$

$$3. f(x) = \frac{|x+3|}{x+3} - x^2 \quad 4. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{6}{(x-1)^2} \quad 5. f(x) = x^2 \cdot 2^{-1/(3-x)}$$

Вариант 7.

$$1. f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 7x}{x} + \frac{2x-1}{x^2-25}$$

$$2. f(x) = \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} + \frac{x+3}{x^2+2x+1}, f(0)=-1$$

$$3. f(x) = -2, x < -\pi/2; 2 \sin x, -\pi/2 \leq x < \pi/2; 1, x \geq \pi/2$$

$$4. f(x) = \frac{3^{1/(x-2)} - 2}{3^{1/(x-2)} + 2} \quad 5. f(x) = \cos 7^{1/x}$$

Вариант 8.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x-x^2}-1}{x} + \frac{2x+3}{x^3-125} \quad 2. f(x) = \frac{\sin 3x}{x^2-2x} + \frac{x+6}{x^4-1}, f(0)=1$$

$$3. f(x) = \frac{|x^2+5x|}{x+5} - x \quad 4. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{3-x} \quad 5. f(x) = e^{x/(4-x^2)}$$

Вариант 9.

$$1. f(x) = \frac{1-\cos 7x}{x^2} + \frac{1}{2x^2-3x+1}$$

$$2. f(x) = (1-2 \sin 5x)^{3/x} + \frac{x+5}{x^2+2x+1}, f(0)=-2$$

$$3. f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}, x < -2; \sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2; \frac{1}{x-2}, x > 2$$

$$4. f(x) = \frac{1}{1+5^{1/x}} \quad 5. f(x) = 2^{x-1/x}$$

Вариант 10.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{1+x+2x^2}-1}{x} + \frac{x+3}{x^2-1} \quad 2. f(x) = \frac{\sin^3 2x}{3x^3} + \frac{x+1}{x^4-16}, f(0) = 5$$

$$3. f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|} \quad 4. f(x) = \frac{3}{1+2^{(x^2-1)/(x^3-4)}} \quad 5. f(x) = |x+1|e^{-1/x}$$

Вариант 11.

$$1. f(x) = \frac{\sin x - \sin 7x}{x} + \frac{x+3}{x^2-25} \quad 2. f(x) = (\cos 8x)^{3/x^2} + \frac{1}{x^3-1}, f(0) = 0$$

$$3. f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2-x^3} \quad 4. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{7^{1/x}} \quad 5. f(x) = \ln(1+2^{3/(x+2)})$$

Вариант 12.

$$1. f(x) = (x/3)^{2/(x-3)} - (x-1)^{-6} \quad 2. f(x) = \frac{\sin(3x^2-2x)}{x} + \frac{1}{x-3}, f(0) = 1$$

$$3. f(x) = \frac{|x|}{x}, x < 0; \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1; 1/(x-1), x > 1 \quad 4. f(x) = \operatorname{arctg}(2^{1/x})$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot 6^{1/x}}$$

Вариант 13.

$$1. f(x) = \frac{\cos 7x - \cos 2x}{x^2} - \frac{x}{x^4-1} \quad 2. f(x) = (1+3x)^{1/x} + (x^2-1)^{-2}, f(0) = 1$$

$$3. f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} x^2 + x \quad 4. f(x) = \operatorname{arctg}(5^{2/(x-3)}) \quad 5. f(x) = 2^{x/(9-x^2)}$$

Вариант 14.

1. $f(x) = (2 - \cos 8x)^{2/x^2} + (x-5)^{-4}$

2. $f(x) = \frac{1 - \cos^3 3x}{x^2} - \frac{1}{(x-4)^3}, f(0) = -2$

3. $f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}, x < -3; \sqrt{9-x^2}, -3 \leq x \leq 3; \frac{1}{x-3}, x > 3$

4. $f(x) = \frac{1}{1 - 7^{1/(x+1)}} \quad 5. f(x) = 2^{2x/(3x-0)}$

Вариант 15.

1. $f(x) = \frac{\sin x - \sin 1}{x-1} + \frac{1}{2x^2-3x} \quad 2. f(x) = \left(\frac{\cos x}{\cos 3}\right)^{1/(x-3)} + \frac{x}{x^2-1}, f(3) = -2$

3. $f(x) = -\frac{|x|}{x}, x < 0; \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2; \frac{1}{x-2}, x > 2$

4. $f(x) = \arcsin(1/3^{1/x}) \quad 5. f(x) = |x|e^{-1/x}$

Вариант 16.

1. $f(x) = (2 - \cos 5x)^{2/x^2} + \frac{x-3}{x^2-9} \quad 2. f(x) = \frac{\arcsin 7x}{x} + \frac{x}{(x-2)^2}, f(0) = 5$

3. $f(x) = 1 - x^3, x < 0; (x-1)^3, 0 \leq x \leq 2; 4 - x, x > 2$

4. $f(x) = \arcsin \frac{3}{x-4} \quad 5. f(x) = \frac{x}{3^{1/x}}$

Вариант 17.

1. $f(x) = \frac{\cos x - \cos 2}{x-2} + \frac{3}{x^2} \quad 2. f(x) = \frac{\sin^4 x}{x^3} - \frac{x}{x-1}, f(0) = 0$

3. $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2} - x \quad 4. f(x) = \frac{5^{1/x} + 2^{1/x}}{5^{1/x} - 2^{1/x}} \quad 5. f(x) = \arcsin[1/(x-4)]$

Вариант 18.

1. $f(x) = \frac{\sin(x+2)}{x^2-4} + \frac{1}{(x^2+x)^2}$

2. $f(x) = (1 - \sin 7x)^{1/x} + \frac{2x}{x+2}, f(0) = -2$

3. $f(x) = 2^x, -1 \leq x \leq 1; 1, x = 1, x-1, 1 < x \leq 4 \quad 4. f(x) = \frac{1}{1 - 5^{1/(3-x)}}$

5. $f(x) = x^2 e^{-1/(x-6)}$

Вариант 19.

1. $f(x) = x \sin(2/x) + 1/(x-1)^6$

2. $f(x) = \frac{\arcsin 3x}{x} + \frac{x+5}{x^3-5x^2-5x+1}, f(0) = -1$

3. $f(x) = \frac{|x+4|}{x^2-16} - x \quad 4. f(x) = \arcsin \frac{1}{x+5} \quad 5. f(x) = \sin 5^{1/(4-x)}$

Вариант 20.

1. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{2/(x-3)} + \frac{4}{x^3-8} \quad 2. f(x) = \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-2} - 1/x^3, f(0) = 1$

3. $f(x) = \cos(\pi x/2), |x| \leq 1, |x-1|, |x| > 1 \quad 4. f(x) = \frac{2}{1 - 7^{x/(3-x)}}$

5. $f(x) = \frac{1}{x \cdot 3^{1/(x+1)}}$

Вариант 21.

1. $f(x) = \frac{\sin(3-x)}{x^3-27} - \frac{1}{x^4-1}$ 2. $f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{1/x} + (x-1)^{-8}, f(0) = 1$
 3. $f(x) = \frac{|x+4|}{x^2-16} - x^2$ 4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{(x-3)^2}$ 5. $f(x) = x^2 \cdot 7^{-1/(4-x)}$

Вариант 22.

1. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x} + \frac{x-1}{x^3-125}$
 2. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} + \frac{x+3}{x^2+4x+4}, f(0) = -1$
 3. $f(x) = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1, 4-2x, 1 < x < 2.5, 2x-7, x \geq 2.5$
 4. $f(x) = \frac{5^{1/(x-3)} - 1}{5^{1/(x-3)} + 1}$ 5. $f(x) = \cos 3^{1/(x-1)}$

Вариант 23.

1. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+2x+x^2}-1}{x} + \frac{x+3}{x^3-8}$ 2. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2+3x} + \frac{x}{x^4-1}, f(0) = 1$
 3. $f(x) = \frac{|x^2-6x|}{x-6} - 3x$ 4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{4-2x}$ 5. $f(x) = 6^{x/(9-x^2)}$

Вариант 24.

1. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x^2-1} + \frac{1}{(x+2)^4}$
 2. $f(x) = (1-\sin 9x)^{5/x} + \frac{1}{x^2-2x+1}, f(0) = -4$
 3. $f(x) = 1-x^2, x \leq 0; x, 0 < x < 1; 1, x \geq 1$ 4. $f(x) = \frac{1}{1+7^{2/(x-3)}}$

$$5. f(x) = 3^{2x-3/x}$$

Вариант 25.

$$1. f(x) = (\cos 7x)^{1/x^2} + \frac{x+2}{(x^2-1)^2} \quad 2. f(x) = \frac{\sin^4 x}{3x^4} + \frac{x}{x^4-16}, f(0) = 5$$

$$3. f(x) = x^2 + \frac{2x+4}{|x+2|} \quad 4. f(x) = \frac{3}{1+3^{(x^2-1)/(x^2-9)}} \quad 5. f(x) = |x-2|e^{-1/(x+2)}$$

Вариант 26.

$$1. f(x) = \frac{\cos x - \cos 5}{x^2 - 25} + \frac{1}{x^3} \quad 2. f(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{x} - \frac{3x}{x-1}, f(0) = 0$$

$$3. f(x) = \frac{|2x-4|}{x^3-8} + x+1 \quad 4. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2^{1/(x+4)}}$$

$$5. f(x) = \ln(1+5^{6/(x+4)})$$

Вариант 27.

$$1. f(x) = (x/7)^{2/(x-7)} - (x-2)^{-4} \quad 2. f(x) = \frac{\sin(x^2-5x)}{x} + \frac{1}{x-6}, f(0) = 1$$

$$3. f(x) = \frac{|x^3|}{x}, x < 0; \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x}, x > 1$$

$$4. f(x) = \operatorname{arctg}(3^{1/(x+3)}) \quad 5. f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot 7^{1/x}}$$

Вариант 28.

$$1. f(x) = \frac{\cos 9x - \cos 2x}{x^2} - \frac{1}{x^6-1}$$

$$2. f(x) = \left(\frac{1+4x}{1+3x} \right)^{1/x} + (x^3-1)^{-2}, f(0) = 1$$

$$3. f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} x^2 + 3x \quad 4. f(x) = \operatorname{arccctg}(2^{4/(5-x)}) \quad 5. f(x) = 3^{x/(25-x^2)}$$

Вариант 29.

$$1. f(x) = (2 - \cos 6x)^{9/x^2} + (x+1)^{-9}$$

$$2. f(x) = \frac{\sin x \sin 7x}{x^2} - \frac{1}{(x+6)^3}, f(0) = -2$$

$$3. f(x) = 0.5x^2, |x| < 2; 2.5, |x| = 2; 3, |x| > 2 \quad 4. f(x) = \frac{1}{1 - 5^{1/(2-x)}}$$

$$5. f(x) = 9^{x/(4x-2)}$$

Вариант 30.

$$1. f(x) = \frac{\sin x - \sin 9}{x - 9} + \frac{x}{2x^2 - 1} \quad 2. f(x) = \left(\frac{\cos x}{\cos 9} \right)^{1/(x-9)} + \frac{x}{x^4 - 1}, f(9) = 0$$

$$3. f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x^2 - 1} + x + 1 \quad 4. f(x) = \operatorname{arccctg}(1/2^{1/(2-x)}) \quad 5. f(x) = |x| \cdot 5^{-1/x}$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ

«ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ» (приложение 5).

Задача 1. Найти производные функций $y = f(x)$. *2, 4, 6 ф-ции*

Задача 2 Найти производные функций заданных параметрически и неявно. *полностью*

Задача 3. Найти производные второго порядка функций $y = f(x)$. *1 ф-цию*

Задача 4. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . *полностью*

Задача 5. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = f(x)$. *одну ф-цию*

Задача 6. Вычислить с помощью дифференциала. *полностью*

Задача 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. *одну задачу*

Задача 8. Решить задачу геометрического или физического содержания.

Вариант 1.

$$1. y_1 = 2\sin^3 3x + \sqrt{\ln(3x - x^2)}; y_2 = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x^2} \cdot 3^{\arcsin 5x};$$

$$y_3 = \frac{\operatorname{arctg}(2x^2 + 3x)}{\sqrt{4x + \sqrt{x^2 + 6x}}}; y_4 = (3x + \sin 4x)^{7x};$$

$$y_5 = \frac{\operatorname{tg}^3 9x \cdot \arccos^6 x^7}{x^{13} \cdot \sqrt[4]{3x - 2\operatorname{ctg} x}}; y_6 = \sin^7(\arcsin(1/x)).$$

$$2. x = e' \sin t; y = e' \cos t; \operatorname{arctg}(y/x) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3. y_1 = \cos^2 x^2; y_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{x}. \quad 4. y = x^3 - 3x + 2; x_0 = 2.$$

$$5. y_1 = \sqrt{\ln^2 x - 4}; y_2 = \sin(x/\ln x). \quad 6. \sqrt{24.8}; \operatorname{tg} 48^\circ.$$

$$7. y_1 = x^2 \ln x, [1; e]; y_2 = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}, [-1; 1].$$

8. В данный шар вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность.

Вариант 2.

$$1. y_1 = 3\operatorname{tg}^6 6x + \sqrt{x^2 + \ln(x+x^2)}; y_2 = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x^4} \cdot 2^{\operatorname{arctg} 6x};$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[9]{3\sqrt{3x+x^2}+4x}}{\ln(2x+3\ln x)}; y_4 = (\cos 6x)^{\operatorname{arctg} x};$$

$$y_5 = \frac{\operatorname{ctg}^5 6x \cdot \sqrt{\arcsin \sqrt{x}}}{\cos x^3 \cdot \sqrt[5]{4x - \operatorname{tg} x}}; y_6 = \operatorname{arccctg}^0 \sqrt{\arcsin x^5}.$$

$$2. x = \ln(1+t^2); y = t - \operatorname{arctg} t; \operatorname{tg}(y+x) = x^3 + y^3.$$

$$3. y_1 = x\sqrt{1+x^2}; y_2 = 5^{\sin 3x}. \quad 4. y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3; x_0 = -2.$$

$$5. y_1 = \operatorname{tg}^2 x; y_2 = x/(x + \ln x). \quad 6. \sqrt{15.9}; \sin 63^\circ.$$

$$7. y_1 = (x-1)/(x+1), [0; 4]; y_2 = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, [0; 1].$$

8. В данный шар вписать цилиндр, имеющий наибольший объем.

Вариант 3.

$$1. y_1 = 2^{\sin \sqrt{x}} + 3\operatorname{ctg}(1/x); y_2 = \sqrt{\operatorname{tg} 7x} \cdot \operatorname{arctg} x^8; y_3 = \frac{\arcsin^5(x^2 + 4x)}{\sqrt[3]{\sqrt{x} + 2\cos 5x}};$$

$$y_4 = x^{\ln(2x+1)}; y_5 = \sqrt[3]{x^8 \cdot \ln^5 x \cdot \arccos^9 4x \cdot (3x^8 - 5x)};$$

$$y_6 = \cos^9(\operatorname{arctg} \sqrt{\sin 5x})$$

$$2. x = 3\log_2 \operatorname{ctg} t; y = 5^{\operatorname{tg}(6t+5)}; \sin(xy) = x + \ln y.$$

$$3. y_1 = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x^2}; y_2 = 7^{\arcsin 5x}. \quad 4. y = \ln x; x_0 = 1.$$

$$5. y_1 = \arccos(1/x); y_2 = x \sin 5x. \quad 6. 4, 8^3; \arcsin 0, 52.$$

$$7. y_1 = \sqrt{(x+1)(9-x)}, [0; 7]; y_2 = 4x/(x^2+1), [0; 2].$$

8. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полукруг радиуса R.

Вариант 4.

$$1. y_1 = 7^{\sin 5x} + \sqrt[3]{2x^2 + 3x}; y_2 = \arcsin \sqrt{x} \sin(1/x); y_3 = \frac{\operatorname{tg}^2(x^2 + 2\sqrt{x})}{\ln(3x + \sin 7x)};$$

$$y_4 = (\ln x)^{\sqrt{2x+7}}; y_5 = x^9 \operatorname{ctg}^5 4x \sqrt{\operatorname{arccctg}^3 9x} \cdot 3^{1/x}; y_6 = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}^7(\ln 7x))}.$$

$$2. x = \arcsin t^2, y = 2t^2 + 3t; \sin(x+y) = x^2 + y^3.$$

$$3. y_1 = \operatorname{tg}^3 7x; y_2 = \sqrt{x}/(1+3x). \quad 4. y = x^2 e^{-x}; x_0 = 0.$$

$$5. y_1 = 5^{\sqrt{2x-3}}; y_2 = \arcsin(2x^2 + 5x). \quad 6. \sqrt[3]{26}; \operatorname{ctg} 47^\circ.$$

$$7. y_1 = (x^2 - 3x)/(x+1), [0; 2]; y_2 = e^{2x} + e^{-2x}, [-2; 1].$$

8. В шар радиуса R вписать конус наибольшего объема.

Вариант 5.

$$1. y_1 = \operatorname{arctg} x^7 + 3 \sin^6 5x; y_2 = \cos \sqrt{2x+3} \cdot \operatorname{tg}(1/x^2);$$

$$y_3 = \frac{\ln^9(x^2 + \sqrt{\operatorname{ctg} 6x})}{x^8 + \sqrt{\sin 6x} + \sqrt{3x^2 + 4x}}; y_4 = x^{1/\sqrt{x}};$$

$$y_5 = x^{9/7} \operatorname{arccctg}^8 7x \sqrt{\operatorname{ctg}^7 6x} \cdot 73^{1/(2x+5)}; y_6 = 5^{\arccos(\sin(x \ln x))}.$$

$$2. x = \arcsin^2 t; y = 1/\sqrt{t^2 + 7t}; \arccos(xy) = x^2 + y^2.$$

$$3. y_1 = \cos^3(1/x); y_2 = x^2 \sqrt{3x^3 + 5x}.$$

$$4. y = \sqrt{4x - 3 - x^2}; x_0 = 3/2. \quad 5. y_1 = x^2 \operatorname{tg} x^3; y_2 = \operatorname{arccctg}(4x^2 + 8x).$$

6. $\sqrt[3]{31,8}$; $\operatorname{tg} 58^\circ$. 7. $y_1 = \sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$; $y_2 = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$.

8. Найти наибольший объем конуса с образующей длины L.

Вариант 6.

1. $y_1 = \arccos(1/x) + 2^{\operatorname{tg} 6x}$; $y_2 = \sqrt{\sin 7x} \cdot \operatorname{ctg}^4 5x$; $y_3 = \frac{\arcsin(5x^2 + 9x)}{\sqrt{6x - \sqrt{x^2 + 9x}}}$;

$y_4 = (1 + 3\sqrt{x})^{\sqrt{2+3x}}$; $y_5 = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^8 4x \cdot \ln^3 7x \cdot \sqrt{\arcsin 13x}} \cdot \operatorname{ctg}^6 12x$;

$y_6 = (\cos 7x)^{x \cos 5x}$.

2. $x = \operatorname{tg}(1/(t^2 + 5t))$; $y = e^{\sqrt{t}}$; $\sin xy = \arcsin(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

3. $y_1 = \sqrt{x}/(1 + \sqrt{1 + x^2})$; $y_2 = \operatorname{arccctg} \sqrt{x}$.

4. $y = \sqrt{3x^2 + 2x}$; $x_0 = 2$. 5. $y_1 = \operatorname{arctg}^3 x$; $y_2 = x \ln^2 x$.

6. $\lg 10,21$; $\operatorname{ctg} 123^\circ$.

7. $y_1 = 2x + 3x^{2/3}$, $[-1,5; 8]$; $y_2 = \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x$, $[\pi/6; \pi/3]$.

8. Периметр осевого сечения цилиндра равен 6. Найти наибольший объем такого цилиндра при заданной длине L его образующей.

Вариант 7.

1. $y_1 = \ln^6 \ln x + \sqrt{\sin 5x}$; $y_2 = \operatorname{tg}^2 x^2 \operatorname{ctg} x^3$; $y_3 = \frac{\sqrt[3]{\cos(x^2 + 6x)}}{\arccos 8x}$;

$y_4 = (\operatorname{tg} \sqrt{x})^{\operatorname{ctg}(1/x)}$; $y_5 = 3^{\arcsin 8x} \sqrt[7]{\operatorname{arctg}^9 6x \ln(x^3 + 3x)}$;

$y_6 = 1/\sin(\sin(x^2 \operatorname{ctg} 13x))$. 2. $x = 5/(\sqrt{t} + 1)$, $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} 4t}$; $3^{\sin(x+y)} = x^2 y^3$.

3. $y_1 = \sin(x^2 \operatorname{tg} x)$; $y_2 = 5^{\arcsin 4x}$.

4. $y = (3x - 4)/(\sqrt[3]{x} + 4), x_0 = 1$.
5. $y_1 = x/(1 + \operatorname{tg} 5x); y_2 = \ln x \arcsin 9x$.
6. $\arctg 0,98; \sin 153^\circ$.
7. $y_1 = 4 \sin 2x - 2 \sin 4x, [0; \pi]; y_2 = 1 - 3x^2 - x^3, [-1; 1]$.
8. Найти прямоугольный треугольник с гипотенузой H , имеющей наибольшую площадь.

Вариант 8.

1. $y_1 = \operatorname{tg}^7 \ln x + \sqrt{\operatorname{ctg} 5x}; y_2 = \sin 8x \arcsin 6x; y_3 = \frac{\sqrt[3]{\arctg(2x^2 + 7x)}}{\arccos 4x};$
 $y_4 = (\cos(1/x))^{\operatorname{tg} 6x}; y_5 = \sqrt[3]{3x^2 + 4} \cdot \ln^5 \ln 6x \cdot 5^{\sin 8x} \cdot \operatorname{ctg} x^7;$
 $y_6 = \cos(\arcsin(x^6 \operatorname{tg} 16x)).$ 2. $x = 2/(t + \operatorname{tg} 3t), y = 2^{\sqrt{2t+3}}; \sqrt[4]{x^4 + y^5} = e^{xy}.$
3. $y_1 = x^3 \arcsin 9x; y_2 = \cos(\sin 5x).$ 4. $y = xe^{-x}, x_0 = 0.$
5. $y_1 = 1/(x - \operatorname{ctg} 8x); y_2 = x^2 \sqrt{1 - x^3}.$ 6. $\arctg 1,058; \cos 147^\circ.$
7. $y_1 = (1 - x + x^2)/(1 + x - x^2), [0; 1]; y_2 = \sin 2x - x, [-\pi/2; \pi/2].$
8. Найти прямоугольник максимальной площади, вписанный в эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$

Вариант 9.

1. $y_1 = \arcsin^2 3x - \sqrt{\arctg 6x}; y_2 = \cos^6(1/x) \operatorname{tg} x^8; y_3 = \frac{\sqrt[3]{\lg(x + \sin 6x)}}{3x + e^{\arctg 4x}};$
 $y_4 = x^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}; y_5 = x^{13} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^9 8x \ln^7 \sin 3x} \cdot 2^{\cos 2x};$
 $y_6 = \arcsin^{16}(\sqrt{2x^9 + \cos^4 \operatorname{ctg} \sqrt{x}}).$
2. $x = t/(t^2 + 1), y = t \operatorname{ctg}(1/t); 5^{\operatorname{tg}(x+y)} = 2x^2 + 5y^3.$

$$3. y_1 = \sqrt{2x^3 + 3x} / (1 + 3\sqrt{x}); y_2 = x^2 \cdot 5^{\sin 7x}.$$

$$4. y = \sqrt[3]{ctgx}, x_0 = \pi/4. 5. y_1 = tg(ctg 3x); y_2 = \sqrt{x} \ln^9 x.$$

$$6. e^{0,02}; \sin 183^\circ.$$

$$7. y_1 = x^2 / (x + 5), [-4; 1]; y_2 = \frac{2}{1 + \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)}, [0; \pi/2].$$

8. Найти прямоугольник наибольшей площади, вписанный в круг радиуса R.

Вариант 10.

$$1. y_1 = 3^{\arcsin 5x} + 2 \ln^5 4x; y_2 = tg^3(1/\sqrt{x}) \cdot ctgx^2; y_3 = \frac{\arctg \sqrt{2x^7 + 5x}}{2 \sin 5x + \sqrt{2 + x^4}};$$

$$y_4 = (\ln x)^{\lg(2x+1)}; y_5 = x^{17} \cdot \arccos^9 x^5 \cdot \cos(1/x^2) \cdot \sqrt{3x+4};$$

$$y_6 = \sqrt[4]{ctg^7(x^9 \sqrt{3x+4} \sin 6x)}.$$

$$2. x = \sqrt{2+t^4} / (3+t^3), y = \sin^9 t^7; \arcsin(xy) = x^3 + y^3.$$

$$3. y_1 = \sqrt{x} \sin x^8; y_2 = (x^2 + x) / (1 + \sqrt{1+3x}).$$

$$4. y = (x^2 - 1)/x, x_0 = -2. 5. y_1 = 1/\sin \sqrt{x}; y_2 = 5^{tg 7x}. 6. (0,99)^4; tg 44^\circ.$$

$$7. y_1 = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x, [-1; 1]; y_2 = 3x^2 - x^3, [-1; 3].$$

8. Найти основание равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной $\sqrt{2}$ имеющего наибольшую площадь.

Вариант 11.

$$1. y_1 = \sqrt[5]{\cos 3x} + 11^{\sin 7x}; y_2 = ctg(1/x^2) \arctg^5 8x; y_3 = \frac{\sqrt[3]{tg(5x^2 - x)}}{\arcsin \cos 8x};$$

$$y_1 = (\sqrt{x})^{\lg \sqrt{x}}; y_5 = 17^{\sqrt{2x+5}} \cdot x^7 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x^7} \cdot \ln(x + \ln x);$$

$$y_4 = \log_6 \arcsin^9(\sqrt{x}/(3x-2)).$$

$$3. x = e' \sin t^7, y = e' \cos t^7; 2^x + 3^y = x^2 + y^3.$$

$$1. y_1 = x^x; y_2 = \sqrt{x}/\cos 6x. 4. y = (2 + \sqrt{x})/(2 - \sqrt{x}), x_0 = 9.$$

$$5. y_1 = x \cdot \operatorname{ctg} 8x; y_2 = \ln x/(x + \ln x). 6. \sqrt{(1,02)^3}; \sin 2^\circ.$$

$$7. y_1 = (10x + 10)/(x^2 + 2x + 2), [0; 1]; y_2 = x - 2 \ln x, [1; e].$$

8. Около правильной треугольной призмы объема V описан цилиндр. Найти наименьшую полную поверхность цилиндра.

Вариант 12.

$$1. y_1 = \sqrt{\cos 7x} + 3^{\sin 5x}; y_2 = \ln^7 2x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg} x^9}; y_3 = \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x^2)}{4x + \sqrt{\ln \ln x}};$$

$$y_4 = (x \ln x)^x; y_5 = \frac{x^7 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^6 4x}}{\cos(2x + 3\sqrt{x}) \cdot \sqrt{2x^3 + 5x}};$$

$$y_6 = \operatorname{arctg}^{23}(\arcsin(3^{\sin 3x} \cdot \operatorname{ctg} 4x)).$$

$$2. x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{t}}; 3^x + 5^y = y^2 + x^3.$$

$$3. y_1 = \log_2 \sqrt{1 + x^2}; y_2 = (\arcsin x)/\sqrt{1 + 3x}. 4. y = \cos^2 x, x_0 = \pi/4.$$

$$5. y_1 = \operatorname{tg}(1/\sqrt{x}); y_2 = (1 + \sin 5x)/\ln x. 6. \operatorname{arctg} 1,028; \lg 1005.$$

$$7. y_1 = 2 \sin x - \cos 2x, [\pi/4; 3\pi/4]; y_2 = x^3 - 3x^2 - 5, [1; 4].$$

8. Цилиндр вписан в шар. Под каким углом должны пересекаться диагонали осевого сечения цилиндра имеющего наибольшую полную поверхность.

Вариант 13.

$$1. y_1 = \sin^4 6x - 1/\sqrt{\operatorname{arctg} 9x}; y_2 = \sqrt[3]{\cos 4x} \cdot 3^{\operatorname{ctg}(3x+5)}; y_3 = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(\sin 6x)}}{2x^3 + e^{\sqrt{x}}};$$

$$y_4 = (8x+1)^{1/\sin 6x}; y_5 = (x^6 - 4)^7 \cdot \sqrt[4]{\operatorname{arctg}^{12} 9x} \ln^8 \cos 12x \cdot 2^{\operatorname{arccos} 2x};$$

$$y_6 = \ln^{14} \ln(1 + \sin 6x / \operatorname{arcsin} 3x).$$

$$2. x = \sin t / (t^2 + \operatorname{tg} t), y = \arccos(1/(t+2)); e^{x/y} = 5x^2 + 8y^3.$$

$$3. y_1 = \sqrt{1-x^2} \arcsin x; y_2 = 5^{\sqrt{\sin 3x}}. 4. y = 2x/(1+x^2), x_0 = \sqrt{2}.$$

$$5. y_1 = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} 7x); y_2 = \sqrt{x} / \ln x. 6. \sqrt[4]{82}; \operatorname{ctg} 59^\circ.$$

$$7. y_1 = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8, [-3; 6]; y_2 = x \ln(x/5), [1; 5].$$

8. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковые стороны равны L . Найти длину большего основания, при которой площадь трапеции будет наибольшей.

Вариант 14.

$$1. y_1 = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x^6} - 1/\sqrt{\operatorname{tg} 9x}; y_2 = \sin x^3 \cos x^7; y_3 = \frac{\arcsin(2x^3 + 4x)}{x^9 + e^{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}};$$

$$y_4 = x^{1/\ln \ln x}; y_5 = \sqrt[13]{\frac{x^6 \cos \ln x \cdot \operatorname{tg}^7 4x}{\sqrt{1+3x^{14}} \cdot 6^{\sin 8x}}}; y_6 = \operatorname{arccctg}^{46}[x^7 / (2 \arcsin 3x + x^5)]$$

$$2. x = \ln \sin(t/2), y = 2^{\sqrt{3t+2\operatorname{tg} 5t}}; xy = \sin \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3. y_1 = \sqrt{1-x^2} \sin 4x; y_2 = 5^{\sqrt{x}} / x. 4. y = \sin^3 3x, x_0 = \pi/12.$$

$$5. y_1 = \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} 6x); y_2 = \sqrt{2x+1} / \ln x. 6. (1,02)^4; \cos 3^\circ.$$

$$7. y_1 = x^3 - 6x^2 + 9, [-1; 2]; y_2 = 2 \sin x + \sin 2x, [0; 3\pi/2].$$

8. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в по-

лукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

Вариант 15.

$$1. y_1 = \cos^4 4x + 1/\sqrt{\operatorname{tg} 6x}; y_2 = \sqrt[3]{\sin^5 4x} \cdot 3^{\operatorname{ctg}(4x+2)}; y_3 = \frac{2x^{12/5} + x^4}{\sqrt{\arcsin^3 6x}};$$

$$y_4 = x^{1/\sqrt{\sin x}}; y_5 = x^6 \cdot \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^{17} 6x} \ln^6 \sin 32x \cdot 3^{\arccos 7x};$$

$$y_6 = 1/\cos(\sin(x\sqrt{1-x^2})).$$

$$2. x = \operatorname{tg}(1/t^6), y = \arctg \sqrt{1+2t^{15}}; e^{x/y} = \sin^3 xy.$$

$$3. y_1 = \arcsin \sin 7x; y_2 = \ln \ln \cos x. 4. y = x \ln(x+e), x_0 = 0.$$

$$5. y_1 = x \arccos 6x; y_2 = x^2/(1+\ln x). 6. (0,98)^5; \sqrt[5]{65}.$$

$$7. y_1 = x^3 - 6x^2 - 9x - 5, [0; 5]; y_2 = x^2 + \cos^2 x, [0; \pi/2].$$

8. Найти наибольший объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 12.

Вариант 16.

$$1. y_1 = \operatorname{tg}^{15} \sqrt{x} + \sqrt{\sin 14x}; y_2 = \operatorname{ctg}(1/\sqrt{x}) \cdot \lg^4(4x+2);$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{\sin(x^2 + \sqrt{x})}}{\sqrt[3]{\cos \sqrt{x^2 + 4x}}}; y_4 = x^{\arcsin(1/x)}; y_5 = \sqrt[17]{\frac{x^6 \cdot \cos^8 3x}{\ln \lg x \cdot \sin^{19} 9x}};$$

$$y_6 = \operatorname{arccctg}^{189}(\operatorname{tg}(1/x^3 \sin 5x)).$$

$$2. x = \sin 5t / \cos 6t, y = \operatorname{ctg}(1/(1+9t)); x^9 \cos y = \operatorname{tg} x + y^{17}.$$

$$3. y_1 = \cos(\cos x^7); y_2 = 6x/(1+\sin 8x). 4. y = xe^{x-1}, x_0 = 1.$$

$$5. y_1 = \operatorname{tg}(1/(1+\sqrt{x})); y_2 = \sqrt{x}/(\sin 4x + \cos 7x).$$

6. $(0,99)^8$; $\operatorname{ctg} 89^\circ$. 7. $y_1 = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x, [\pi/6; \pi/3]$; $y_2 = \frac{x^2}{x+5}, [-4; 1]$.

8. На кривой $y = \sqrt{x}$ найти точку, ближайшую к точке $M(3;6)$.

Вариант 17.

1. $y_1 = \operatorname{ctg}^4 \ln x + \sqrt{\operatorname{tg} 8x}$; $y_2 = \cos 8x \cdot \operatorname{arctg} 6x$; $y_3 = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}(2x^7 + 9x)}}{\arcsin \sqrt{2x^2 + 3x}}$;

$y_4 = (\ln x)^{\sqrt{\sin 7x}}$; $y_5 = \frac{x^7 \cos^5 5x}{\sin 7x \cdot \sqrt{2x + \sqrt{x}}}$; $y_6 = \operatorname{tg}^{12}(\sqrt{2x+1} \cdot \ln 5x)$

2. $x = \cos \ln \sin t$, $y = t/(1+t^7)$; $\operatorname{tg}(x+y) = e^{xy}$.

3. $y_1 = x^3 \operatorname{tg} \sqrt{x}$; $y_2 = x^7 / \lg x$. 4. $y = \sin x / (1 - \cos x)$, $x_0 = \pi/2$.

5. $y_1 = \ln x / \ln \ln x$; $y_2 = x^6 \sqrt{1-x^8}$. 6. $(4,96)^3$; $\operatorname{tg} 3^\circ$.

7. $y_1 = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x, [\pi/6; \pi/3]$; $y_2 = 2/(x+1) + x/2, [0; 2,5]$.

8. Найти наименьшее расстояние от точки $M(2;0)$ до точек графика функции $y = \sqrt{2} / \sqrt{27(x-2)}$.

Вариант 18.

1. $y_1 = \sin^5 x^{11} + 3^{14} \sqrt{\ln 5x}$; $y_2 = \operatorname{tg}^8 5x \cdot \arcsin^2 \sqrt{x}$; $y_3 = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x + \cos 4x)}}{3x^6 + e^{\operatorname{arctg} 8x}}$;

$y_4 = x^{\operatorname{ctg}(1/\sqrt{x})}$; $y_5 = x^{19} \cdot \sqrt[7]{\operatorname{ctg}^8 9x \ln^8 \cos 9x} \cdot 2^{\sin 12x}$;

$y_6 = \sqrt[17]{\operatorname{tg}^{15}(x^{14} \cdot \operatorname{ctg}(1/x))}$.

2. $x = \operatorname{ctg} t \cdot \sqrt{4t^6 + 1}$; $y = \operatorname{tg}(1/t)$; $\sin(x^6 + y) = \operatorname{tg}(2x + 5y)$.

3. $y_1 = \ln(3x + 4 \sin 5x)$; $y_2 = \sqrt{2x+1} / (1 + \sqrt{3x+1})$.

4. $y = \operatorname{ctg}(\pi/3, -x), x_0 = \pi/6$. 5. $y_1 = 2^{\sqrt{2\sin 3x+4x}}$; $y_2 = \sqrt[3]{3x + \cos 5x}$.

6. $\cos(13\pi/36)$; $1/\sqrt{0,94}$.

7. $y_1 = 0,5 \cos 2x + \cos x, [0; \pi/2]$; $y_2 = e^{-x}(x^2 + x - 5), [-4; 4]$.

8. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(0;2)$ до кривой

$$y = \sqrt{x^2 + 4x + 18} + 2.$$

Вариант 19.

1. $y_1 = \operatorname{ctg}^7(\ln 3x)$; $y_2 = \arcsin 9x \cdot \operatorname{tg} 7x$; $y_3 = \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sqrt[10]{\ln 5x}}$; $y_4 = \left(\sin \frac{2}{x}\right)^{\operatorname{tg} 13x}$

$y_5 = \sqrt[3]{5x^2 + 3x} \cdot 2^{\cos 7x} \cdot \sqrt{\ln x}$; $y_6 = \operatorname{tg}^7(\operatorname{arctg}(x^2 + 3x))$.

2. $x = \frac{3}{t + \sqrt{t}}$, $y = 3^{\sqrt{2t+1}}$; $\sqrt[3]{x+y} = \sin(xy)$.

3. $y_1 = x^3 \operatorname{tg} 7x$; $y_2 = \sin(\cos 7x)$. 4. $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$, $x_0 = 1$.

5. $y_1 = \frac{1}{2x - \operatorname{tg} 7x}$; $y_2 = x^3 \sqrt{1-x^2}$. 6. $\operatorname{arctg} 0,96$; $\cos 153^\circ$.

7. $y_1 = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $[0;1]$; $y_2 = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Найти минимальное расстояние от точки $M(0;2)$ до точек графика

функции $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(x-2)}}$.

Вариант 20.

1. $y_1 = 2^{\sqrt{\sin 5x}} + 8 \ln^7 9x$; $y_2 = \operatorname{arctg}(1/\sqrt[3]{x}) \cdot \operatorname{tg}^8 x^6$; $y_3 = \frac{\arcsin^4(\sqrt{x \ln x})}{\sqrt{2+x^8}}$;

$$y_4 = (\ln x)^{\ln \ln x}; y_5 = \frac{x^{78} \sin^6 7x \cdot \ln^3 4x}{\sqrt{\operatorname{tg}^{13} 5x}}; y_6 = 1/\sin^{67} [\sqrt{3x+4}/(x^8 \cos x^9)]$$

$$2. x = 3t/(2t + \sin 4t), y = 7^{7^{\sin t}}; \arcsin^9(x+y) = x^3 + y^3.$$

$$3. y_1 = 1/(4x + \sqrt{\cos 5x}); y_2 = (x^5 + 7x)/(1 + \sqrt{1+9x}).$$

$$4. y = 2^{-x} - 2^{-2x}, x_0 = 2.$$

$$5. y_1 = \cos \ln^2 x; y_2 = \sqrt{1+x^2}/(1+\sqrt{x}). \quad 6. 1/(0,98)^7; \cos 88^\circ.$$

$$7. y_1 = 2x^3 - 1,5x^2 + 2, [0;3]; y_2 = x^2\sqrt{3-x}, [1;3].$$

8. На графике функции $y = 1/2\sqrt{x}$ найти точку, ближайшую к началу координат.

Вариант 21.

$$1. y_1 = \operatorname{ctg}^6 \sqrt{2x} - \sqrt{\arcsin 7x}; y_2 = \operatorname{tg}(1/\sqrt[3]{x}) \cdot \lg^8(7x^7 + 5);$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{\cos(3x^4 + 7\sqrt{x})}}{\sqrt[8]{\sin \sqrt{4x^3 + 6x}}}; y_4 = (\arcsin 6x)^{1/\cos 5x}; y_5 = \sqrt[7]{\frac{x^8 \cdot \sin^9 6x}{\lg \ln x \cos^{39} 8x}};$$

$$y_6 = \operatorname{arctg}^{18}(\operatorname{ctg}(1/x^3) \cdot 7^{\cos 13x}).$$

$$2. x = \cos 6t / \sin 5t, y = \operatorname{tg}(1/(1-7t)); x^5 \sin y = \operatorname{ctg} x + y^7.$$

$$3. y_1 = \sqrt{x} \cdot 5^{\arcsin 4x}; y_2 = \operatorname{tg} \ln(2+3x^6).$$

$$4. y = 4\operatorname{ctg} x - \cos x / \sin^2 x, x_0 = \pi/2. \quad 5. y_1 = \sqrt{x}/(1+\ln x); y_2 = x^4 \sin 5x.$$

$$6. 1/\sqrt{3,99}; \sin 155^\circ.$$

$$7. y_1 = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 1, [-2;1]; y_2 = (x-1)\sqrt{x+2}, [-2;0].$$

8. Представить число 48 в виде суммы двух положительных

слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

Вариант 22.

$$1. y_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{\cos 5x} + 3^{\sin 7x}; y_2 = \operatorname{ctg}^7 x^6 \cdot \sqrt[4]{\ln 5x}; y_3 = \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}(2+x^5)}}{\arcsin \sqrt{4x^4+5x}};$$

$$y_4 = (\ln x)^{1/\sqrt{\cos x}}; y_5 = \frac{\operatorname{tg} x^5 \cdot \sin^7 6x}{\cos 7x \cdot \sqrt{4x} + \sqrt[3]{x}}; y_6 = \operatorname{tg}^2(\sqrt{3x+1}/\ln 9x)$$

$$2. x = \sin \ln \cos t, y = \sin^2 \sqrt{t}; \operatorname{tg}(x+y) = 2^y + 3^x.$$

$$3. y_1 = x^2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}; y_2 = \sqrt{\arccos \sqrt{x}}. 4. y = \sqrt[3]{x-1}, x_0 = 1.$$

$$5. y_1 = 1/(1 + \operatorname{tg} \sqrt{x}); y_2 = x \ln \cos x. 6. (4,95)^4; \operatorname{tg} 5^\circ.$$

$$7. y_1 = 1 - \cos 4x + \cos 2x, [0; \pi/2]; y_2 = x^3 + 3x^2 - 2, [-2; 2].$$

8. Число 8 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Вариант 23.

$$1. y_1 = 5^{\sqrt{x}} + \sin^3 x^4; y_2 = \arcsin(1/x) \sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}; y_3 = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x + \sin^6 x)}}{4x^5 + 3^{\arccos 9x}};$$

$$y_4 = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}; y_5 = x^{49} \cdot \sqrt[6]{\operatorname{tg}^8 5x} \ln^4 \sin 2x \cdot 2^{\arcsin 42x};$$

$$y_6 = \sqrt[16]{\operatorname{arccotg}^{15}(\cos x^4 \cdot \operatorname{tg}(1/x))}.$$

$$2. x = \operatorname{tg} t \cdot \sqrt{8t^3+1}; y = e^{1/t}; x^6 + y^6 = e^{y/x}.$$

$$3. y_1 = \cos \operatorname{arccotg} 2x; y_2 = \sin \sqrt[3]{x+x^2}.$$

$$4. y = (x^3 + 2x^2)/(x-1)^2, x_0 = -2. 5. y_1 = 2^{\sqrt{\sin 4x+x}}; y_2 = \sqrt{x} \ln \ln x.$$

$$6. \sin(13\pi/36); 1/\sqrt{1,04}.$$

$$7. y_1 = \sin 2x - x, [-\pi/2; \pi/2]; y_2 = x^3 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1; 2].$$

8. Число 20 разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

Вариант 24.

$$1. y_1 = 8^{\sqrt[5]{x}} + \ln^5 9x; y_2 = \operatorname{ctg}(1/\sqrt[8]{x}) \cdot \operatorname{tg}^6 x^4; y_3 = \frac{\arcsin^5(\sqrt{x + \ln x})}{\sqrt{2 + \arctg x}};$$

$$y_4 = (\ln \ln x)^{1/\ln x}; y_5 = \frac{x^{58} \cos^7 6x \cdot \lg^6 7x}{\sqrt{\operatorname{ctg}^{17} 6x}};$$

$$y_6 = 1/\cos^{57}[\sqrt{5x+6}/(x^4 \sin x^{10})]$$

$$2. x = 3t/(t + \cos 5t), y = 7^{4 \arcsin t}; \sin^9(x+y) = x^9 + y^9.$$

$$3. y_1 = x^5 \sqrt{\cos 5x}; y_2 = \lg(3x + \sqrt{1+x^2}). \quad 4. y = \arctg x, x_0 = 1.$$

$$5. y_1 = \sin \ln^2 x; y_2 = (1 + \sqrt{x})/\sqrt{1+x^2}. \quad 6. 1/(2,98)^5; \arctg 0,97.$$

$$7. y_1 = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 2]; y_2 = x/2 + \sin^2 x, [-\pi/2; \pi/2].$$

8. Сумма квадратов двух положительных чисел равно 300. Подобрать эти числа так, чтобы произведение одного на квадрат другого было наибольшим.

Вариант 25.

$$1. y_1 = \sqrt[8]{\sin 9x} + 17^{\cos 5x}; y_2 = \operatorname{tg}(1/x^5) \arctg^{15} 5x; y_3 = \frac{\sqrt[4]{\operatorname{ctg}(x^2 - x)}}{\arccos \sin 7x};$$

$$y_4 = (\cos \sqrt{x})^x; y_5 = 7^{\sqrt{6x+7}} \cdot x^7 \cdot \sqrt[3]{\arcsin x} \cdot \ln^9(x + \sqrt[3]{x});$$

$$y_6 = \log, \arctg^5(\sqrt{x}/(3 \sin x - 1)).$$

$$2. x = e^t \arcsin t^7, y = e^t \operatorname{arctg} t^7; 7^x + 2^y = x^6 + y^5.$$

$$3. y_1 = x^{\ln(1+4x)}; y_2 = \sqrt{x} / \sin \cos x. 4. y = 2\sqrt{x} / (2 + \sqrt{x}), x_0 = 25.$$

$$5. y_1 = x \cdot \operatorname{tg} 9x; y_2 = \arcsin \ln x / (x + \ln x). 6. 1/\sqrt[3]{26,7}; \sin 94^\circ.$$

$$7. y_1 = \ln 2x - x^2 + x, [0, 5; 2]; y_2 = 2x - \operatorname{tg} x, [0; \pi/3].$$

8. Найти число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.

Вариант 26.

$$1. y_1 = \sqrt{\sin 7x + 3^{\cos 4x}}; y_2 = \lg^6 5x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x^3}; y_3 = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^4)}{7x + \sqrt{\ln \cos x}};$$

$$y_4 = (x + \ln x)^x; y_5 = \frac{\sin^{13} x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^6 4x}}{\lg(5x + \sqrt{x}) \cdot \sqrt{6x^7 + 4x}};$$

$$y_6 = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}^{33}(\arccos(3^{\lg 3x} \cdot \operatorname{ctg} x^9)).$$

$$2. x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{t}}; 2^{\sin(x+y)} = y^2 x^3.$$

$$3. y_1 = \log_3 \sqrt{1 + x^3}; y_2 = (\arccos x) / (1 + \arccos 3x).$$

$$4. y = (x^3 + 1) / x, x_0 = -1.$$

$$5. y_1 = \operatorname{ctg}(1/x^9); y_2 = (1 + \ln \sin 5x) / x. 6. \sqrt[4]{629}; \lg 99.$$

$$7. y_1 = e^{-2x} \cos 2x, [0; 3\pi/4]; y_2 = (2x + 1) / (x - 1, [-1; 1]).$$

8. Число 180 разбить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:2, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

Вариант 27.

$$1. y_1 = \cos^4 6x - 1/\sqrt{\operatorname{arctg} x}; y_2 = \sqrt[3]{\sin 7x} \cdot 2^{x^{5x}}; y_3 = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}(\cos 4x)}}{2x^{13} + e^{\sin \sqrt{x}}};$$

$$y_4 = (8x)^{1/\cos 2x}; y_5 = (x^4 - x)^6 \cdot \sqrt[7]{\arcsin^2 x \ln^6 \sin 16x} \cdot 2^{\cos 2x};$$

$$y_6 = \sin^{15} \lg(1 + \arcsin 2x/\sin 3x).$$

$$2. x = \operatorname{tg} t / (t^2 + \operatorname{ctg} t), y = \arcsin t^7; e^{x/y} + e^{y/x} = x^2 + y^2.$$

$$3. y_1 = \sqrt{1+x^2} \arccos x; y_2 = 5^{\sqrt{\cos 9x}}. 4. y = \operatorname{ctg}^2 x, x_0 = \pi/4.$$

$$5. y_1 = \operatorname{tg}(\sin 3x); y_2 = \ln^2(1 + \sqrt{x}). 6. \sqrt[4]{84}; \operatorname{ctg} 28^\circ.$$

$$7. y_1 = (3^{x+2} + 2 \cdot 3^{-x-1})/\ln 3, [-1; 1]; y_2 = 5 \sin x + 0,5 \sin 2x - 2x, [-\pi/2; 0].$$

8. Найти положительное число, которое при сложении с ему обратным дает наименьшую сумму.

Вариант 28.

$$1. y_1 = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x^9} - 1/\sqrt{\operatorname{ctg} 5x}; y_2 = \sin x^4 \cos x^8; y_3 = \frac{\arcsin(6x^7 - 7x)}{5x^{15} + e^{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}};$$

$$y_4 = (\ln \ln x)^8; y_5 = \sqrt[17]{\frac{x^5 \sin \ln x \cdot \operatorname{ctg}^3 9x}{\sqrt{1-3x^{17}} \cdot 5^{\cos 8x}}};$$

$$y_6 = \arcsin^{56} [x^8 / (4 \operatorname{arctg} 7x + 4x^9)]$$

$$2. x = \sin \ln(t/2), y = 3^{\sqrt{t + \operatorname{ctg}^2 t}}; x + y = \cos \frac{2x + y}{x - 2y}.$$

$$3. y_1 = \sqrt{1-x^4} \operatorname{tg} 4x; y_2 = x/(1 + 5^{\sqrt{x}}). 4. y = (x^2 - 2x + 2)/x^2, x_0 = 2.$$

$$5. y_1 = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} 5x); y_2 = \sqrt{4x+1}/\ln(1+5x). 6. \lg 998; \operatorname{tg} 153^\circ.$$

$$7. y_1 = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1; 2]; y_2 = \operatorname{arctg}[(1/x)/(1+x)], [0; 1].$$

8. Даны точки A(2;0) и B(4;3). На оси ординат найти точку N

такую, чтобы сумма длин отрезков AN и BN была наименьшей.

Вариант 29.

$$1. y_1 = 2^{\sin 4x} + 1/\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}; y_2 = \sqrt[5]{\cos^4 8x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}; y_3 = \frac{4x^{13/7} + x^6}{\sqrt{\arcsin^8 7x}};$$

$$y_4 = (\sin \sqrt{x})^{1/\sin x}; y_5 = x^8 \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg}^{19} 9x \ln^9 \cos 3x} \cdot 5^{\arcsin 5x};$$

$$y_6 = 1/\sin(\operatorname{tg}(x + \sqrt{1-x^2})).$$

$$2. x = \operatorname{arctg}(1/t^7), y = \operatorname{ctg} \sqrt{1+8t^{18}}; e^{x/y} = \sin^3 xy + \sqrt{xy}.$$

$$3. y_1 = \arccos \cos 8x; y_2 = \cos \ln \sin x. 4. y = \cos^2 x, x_0 = \pi/4.$$

$$5. y_1 = x/\arccos^4 7x; y_2 = x^3(1 + \ln 5x). 6. (0,99)^6; \sqrt[5]{66}.$$

$$7. y_1 = x^4 - 8x^2 - 9, [0;3]; y_2 = (5 + \sin x) \cos x + 3x, [0; \pi/2].$$

8. Представить число 20 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

Вариант 30.

$$1. y_1 = \sqrt[3]{\cos 8x} - 7^{\sin 6x}; y_2 = \operatorname{ctg}(1/x^6) \operatorname{arctg}^{19} 6x; y_3 = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x^3 - 6x)}}{\arcsin \operatorname{tg} \sin 7x};$$

$$y_4 = (\sin \sqrt[4]{x})^x; y_5 = 5^{\sqrt{4x+2}} \cdot x^9 \cdot \sqrt[3]{\arccos x} \cdot \lg^4(4x + \sqrt[3]{x});$$

$$y_6 = \arcsin^8(\sqrt[3]{x^7}/(3 \cos 9x - 1)).$$

$$2. x = \arcsin e', y = e' \operatorname{ctg} t^6; 7^y + 2^x = \sin \sqrt{xy}.$$

$$3. y_1 = x^{1/\ln(1+8x)}; y_2 = \cos^3 \sin x^4. 4. y = \sin x + \cos x, x_0 = \pi/4.$$

$$5. y_1 = \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} 6x; y_2 = \arccos x/(x + e^{\sin 9x}). 6. e^{0,02}; \operatorname{ctg} 88^\circ.$$

7. $y_1 = x^5 - x^3 + x + 2, [-1; 1]; y_2 = \sin x + \cos 2x, [0; \pi]$.

8. Из всех правильных треугольных призм объема V , найти призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Найти длину стороны основания этой призмы.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ» (приложение 6).

Вариант 1.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln(x-1)$

4. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}$

Вариант 2.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 6x)}{\ln \sin x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin 3x \cdot \operatorname{ctg} 7x$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x)^{\sin 2x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\cos x)^{1/(x-\pi/2)}$

Вариант 3.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 2x + 1}{x^{20} - 4x + 3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \operatorname{ctg} x$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - 1/x^2)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{tg} 6x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+2^x)^{1/x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 1-0} [\ln(1-x)]^{\ln x}$

Вариант 4.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 1)$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$
 5. $\lim_{x \rightarrow 0+} [\ln(\operatorname{ctg} x)]^{\operatorname{tg} 3x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{tg} 4x)^{\arcsin 3x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 1} (1/\ln x - x/\ln x)$

Вариант 5.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+3^x)}{\sqrt{3+2x^2}}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos 3x}{e^{4x} - \cos 4x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 3} (9-x^2) \operatorname{tg}(\pi x/6)$
 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 3x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 5x)^x$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} [\ln(1/x)]^x$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\sin 6x}$

Вариант 6.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3^x - 1} \right)$
 5. $\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x)^{\ln x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 7x)^{1/\sin 3x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$

Вариант 7.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 2^x}{3^x - 5^x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctg x) \ln x$
 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 5x)^x$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1/(x^2-1)}$

Вариант 8.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x)$
 4. $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x^2)^{1/(1-\cos x)}$ 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/\sqrt{x}}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$
 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right]$

Вариант 9.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^8 + x^3 + 2x + 2}{x^6 - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-8} + 2}{\cos 3x + \cos 4x - 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin(x-1) \operatorname{tg}(\pi x/2)$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x)^{\sqrt{x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1-} (\sin \pi x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} (5^x + x)^{1/x}$

Вариант 10.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 + x^6 - 2}{x^{10} - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{1/x} - 1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$ 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x})$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2)^x$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 3x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi-} (\sin x)^{1/(\pi-x)}$

Вариант 11.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$ 1. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{tg} x \ln x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)^{1/x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\operatorname{ctg} x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0+} [\ln(1/x)]^x$

Вариант 12.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 4x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \operatorname{ctg} 6x$ 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{1 - x^5} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x)^{\sin \pi x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 5x)^{1/x^2}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1/4x)^{\sqrt{x}}$

Вариант 13.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 5x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x}-2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} 3x \operatorname{ctg} 4x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7}{1-x^7} - \frac{2}{1-x^2} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{x})^{\sin 4x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 7x)^{1/\sin x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1/\ln 4x)^x$$

Вариант 14.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin x}{\ln \arcsin 4x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{11^x - 1} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x})^{\sin 7x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} (\arcsin x)^{e^x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 2^x)^{1/x}$$

Вариант 15.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{arctg} 9x}{\ln \operatorname{arctg} 4x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 1) \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - \sqrt[3]{x})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} x)^{7x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\cos x)^{\operatorname{tg} x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0+} (-\ln x)^{2x}$$

Вариант 16.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^x}{x^3 - 27} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0+} (2^x - 1) \ln x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^{\sin 3x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{1/2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (1/x)^{\operatorname{arctg} 2x}$$

Вариант 17.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((2 \arccos x)/\pi)}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln^4(1/x)$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt[3]{x^2} - \ln x)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x)^{\sin 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (x)^{1/\ln^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (\ln x)^{\frac{1}{6x}}$

Вариант 18.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos x \ln(x-3)}{\ln(e^2 - e^2)}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (x - \ln^2 x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{ctg}(\pi(x-2))$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x)^{\sin 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{1/\arcsin x}$

- $\lim_{x \rightarrow +0} (x+1)^{1/x}$

Вариант 19.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{\sin 2\pi x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2 - \operatorname{arctg} x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} x^3 e^{-1/x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{5x-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 7x)^{2x^{2/3}}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (x+7)^{1/x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (3\sqrt{x} + 2x)^{1/\ln x}$

Вариант 20.

- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{5^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \arcsin(x-3) \operatorname{ctg}(x-3)$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{4/3} - \ln x^2)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{\sin 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{\ln 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} 3x)^{\sin 5x}$

Вариант 21.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 10}{x^2 - 3x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}{\ln(x-2)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\operatorname{ctg} 5x)$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (\ln 5x - x^2)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2/(1+\ln x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 5x)^{\sin 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (1/x^2)^{x^2}$

Вариант 22.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{3+2x} + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln^2 x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{7^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 5x^2)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/\sqrt[3]{x})^{\sin 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin 8x)^{6x}$

Вариант 23.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \ln(2x + 3^{2x})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1/\sin 5x - 1/2x)$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4-0} (\operatorname{tg} 2x)^{x^{1/4-x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} 3x)^{5x}$

- $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$

Вариант 24.

- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi/2 - \arcsin(2x/\pi)}{\cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x + x}{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (49 - x^2) \operatorname{tg}(\pi x/14)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(7x-6)} - \frac{2x}{\ln(3x-2)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin 5x)^{\sin 9x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[4]{x})^{\operatorname{ctg} 2x}$

Вариант 25.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{x\sqrt{1-x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln 3x \ln(2x+1)$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (\ln x - \sqrt[4]{x^2})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 3x)^{\arccos x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^{1/(x+2x^2)}$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0+} (1/x)^{1/9x}$$

Вариант 26.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + x)}{\ln(2 + x + x^2)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0+} \sin 8x \ln x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(2x-1)} - \frac{x}{\ln x} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{\sqrt{x^2+3x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} (1/\sqrt{x})^{\arctg 3x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0+} (3x)^{\operatorname{ctg} 8x}$$

Вариант 27.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin 5x}{\ln \arcsin 7x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x} \operatorname{ctg} 9x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{4(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{5(1-\sqrt[3]{x})} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow +0} (x)^{2/x \sin 3x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/\ln(5^x-1)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0+} (1/x^2)^{\sqrt{x}}$$

Вариант 28.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x + \cos(\pi x)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \operatorname{tg} 3x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{2x^2} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\ln x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{x^2+5x})^{1/\sqrt{3x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}$$

Вариант 29.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x \cos x - \sin x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[6]{x} \ln(x^2 + 5x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x^2} - \operatorname{ctg}^2 3x \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 4x)^{1/\ln 4x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{1/(6x^2+4x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 7x)^{\sin 9x}$$

Вариант 30.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - \cos 5x)} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^x - 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - 7^{1/x}) \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x - \sqrt[3]{x^4})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} 5x)^{6x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\cos 5x)^{\operatorname{tg} x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 5x)^{\frac{\sin^2}{x}}$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА»

(приложение 7).

Вариант 1. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$

Вариант 2. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{x}$

Вариант 3. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$

Вариант 4. 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{e^x} \left(\sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x + 1} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$

Вариант 5. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$

Вариант 6. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}$

Вариант 7. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-2x^2}}$

Вариант 8. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} [x - x^2 \ln(1 + 1/x)]$

Вариант 9. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 + x^2/2 - \cos x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$

Вариант 10. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$

Вариант 11. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 2}{\sin x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 e^{-x} - x^3}{x^4}$

Вариант 12. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \cos x} - \frac{3}{x^4} \right)$

Вариант 13. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$

Вариант 14. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \cos x - x^2/12}$

Вариант 15. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Вариант 16. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{\operatorname{tg} x^2}$

Вариант 17. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}$

Вариант 18. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}$

Вариант 19. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 + x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

Вариант 20. 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x - \sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^3} - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x^2}$

Вариант 21. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{1 - \cos x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x - \ln(1+x)}$

Вариант 22. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^2 \sin^2 x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{x^3}$

Вариант 23. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \sqrt{1+x^2}}{x^5}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 3x}$

Вариант 24. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \sin 5x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{x^3}$

Вариант 25. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{3^x + 3^{-x} - 2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x - x}$

Вариант 26. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 \sin 9x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{x^2 \operatorname{tg}^2 5x}$

Вариант 27. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{\sin^2 x \arcsin x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4})$

Вариант 28. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - x^3/3}{\sin^2 3x \sin^3 4x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1-2x}}{\sin x}$

Вариант 29. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+5x} - \sqrt{1+6x}}{\operatorname{tg} x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^3 \ln(1+1/x) - x^2 + x/2]$

Вариант 30. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3}$

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ
«ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОД-
НОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ» (приложение 8).**

Условия задач.

№1 – исследовать на экстремум и построить график функции.

№№ 2, 3 – провести полное исследование и построить график функции.

№ вар.	№ 1	№ 2	№ 3
1.	$y = \frac{1}{4}(x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1)$	$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$	$y = x^2 e^{-x^2}$
2.	$y = (x-1)^2 \cdot (x-3)^3$	$y = \frac{2}{x^2 + 2x}$	$y = x^2 \ln x$
3.	$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 7$	$y = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$
4.	$y = (x-2)^2 (x-3)^3 \cdot \frac{5^x}{27}$	$y = \frac{2x^2 - 1}{x}$	$y = x + 2 \arctg x$
5.	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$	$y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$	$y = x e^{\frac{-x^2}{2}}$
6.	$y = -\frac{1}{27}(x^2 - 9)^2$	$y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$	$y = (x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}$
7.	$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$	$y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$	$y = \frac{e^{1-x}}{1-x}$
8.	$y = -\frac{1}{16}(x-2)^2 (x+3)^2$	$y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$	$y = x^2 \cdot e^x$

№ вар.	№ 1	№ 2	№ 3
9.	$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$	$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$	$y = e^{2x-x^3}$
10.	$y = (x+1)^2 \cdot (x-3)^3 \cdot \frac{1}{8}$	$y = \frac{1-2x^3}{x^2}$	$y = \sin x - \cos x$
11.	$y = 2x^3 + 4x^2 - 9$	$y = \frac{4x^2}{3+x^2}$	$y = \frac{e^x}{x}$
12.	$y = 32x^2 \cdot (x+1)^2$	$y = \frac{x^3}{x^2+1}$	$y = \frac{x}{\ln x}$
13.	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12$	$y = \frac{x^2-1}{x+2}$	$y = (x+1)^2 \cdot \ln(x+1)$
14.	$y = (x+4)^2 \cdot (x-2)^2 \cdot \frac{1}{27}$	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$	$y = (x-5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$
15.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 5$	$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	$y = \frac{x}{\ln x}$
16.	$y = -\frac{1}{25} \cdot (x^2-5)^2$	$y = \frac{x^3}{x^2-4}$	$y = (x+1) \cdot \ln(x+1)$
17.	$y = 16x(x-1)^3$	$y = \frac{x^2+1}{2-x}$	$y = (x+2) \cdot e^x$
18.	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$	$y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$	$y = 2x - \ln x$
19.	$y = (3x-1)^4 (4x+1)^3$	$y = \frac{(x+2)^2}{x-2}$	$y = (2x-1) \sqrt[3]{(x-2)^2}$

20.	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	$y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$	$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$
21.	$y = 8(x+2)^2(x+1)^2$	$y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$	$y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$
22.	$y = \frac{1}{8}(x^3 + 3x^2 - 9x - 11)$	$y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$	$y = x^2 \cdot e^{-x^2}$
23.	$y = \frac{1}{9}(2x+3)^3(x-1)^2$	$y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$	$y = x \cdot \ln^2 x$
24.	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	$y = 9x \cdot e^{-x}$
25.	$y = (2x+3)^2(2x+1)^2$	$y = \frac{1-x^3}{x^2}$	$y = x + \operatorname{arctg} x$
26.	$y = x^3 - 3x^2 + 2$	$y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$	$y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$
27.	$y = (x+1)^2(x+3)^2$	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y = (x-2)e^{3-x}$
28.	$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$	$y = \frac{x^2 - 12x + 27}{(x-1)^2}$	$y = 3x \cdot e^x$
29.	$y = (2x-1)^3(3x+1)^2$	$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$	$y = \sin 2x + \sin x$
30.	$y = 4 + 3x^2 - 2x^3$	$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$	$y = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ
«ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ»**

(приложение 9).

Условия задач.

№1 – найти и построить область определения функции двух переменных.

№ 2 – найти и построить линии уровня функции двух переменных.

№ 3 – вычислить дифференциал первого порядка функции двух переменных в точке $P_0(x_0; y_0)$.

№ 4 – найти производную сложной функции.

№ 5 – вычислить производную по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ для функции

$u = f(x; y; z)$ в точке A в направлении, составляющем с осями координат углы α , β и γ – для четных вариантов, и в направлении вектора \vec{AB} – для нечетных вариантов.

№ 6 – найти и построить вектор градиент функции $z = f(x; y)$ в точке P_0 .

№ 7 – исследовать на экстремум функцию.

Вариант 1.

1. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$. 2. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 11$ 3. $z = \sqrt{x^2 + y^3 + 6}$, $P_0(1; 3)$

4. $u = \ln \frac{\sin x}{\sqrt{y}} + e^z$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$, $z = \operatorname{tg}^2 t$, найти $\frac{du}{dt}$

$$5. u = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}, A(1;1;1), B(0;1;4)$$

$$6. z = \operatorname{arctg}(x+y), P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad 7. z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$$

Вариант 2.

$$1. z = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}} \quad 2. z = 2x^2 - 2x + 4y^2 + 4y - 2$$

$$3. z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, P_0(1;2) \quad 4. z = u^v, \text{ где } u = \sin^2 x, v = \cos 2x,$$

$$\text{найти } \frac{dz}{dx} \quad 5. u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, A(1;2;1), \alpha = \beta = \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$6. z = \sqrt{y^2 - x^2}, P_0(3;-5) \quad 7. z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

Вариант 3.

$$1. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad 2. z = \sqrt{x+y} \quad 3. z = \frac{y}{\sqrt{x}}, P_0(4;3)$$

$$4. z = e^{x^2 y}, \text{ где } y = \varphi(x), \text{ найти } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ и } \frac{dz}{dx}$$

$$5. u = x^{y+x}, A(1;2;1), B(2;0;3) \quad 6. z = \sqrt{x^2 + y^2}, P_0(-3;4)$$

$$7. z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Вариант 4.

$$1. z = \ln \frac{x}{y} \quad 2. z = e^{xy} \quad 3. z = \frac{x}{y^2}, P_0(1;1)$$

$$4. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ где } x = u \sin v, y = v \cos u, \text{ найти } \frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$5. u = z\sqrt{\frac{x}{y}}, A(1;1;1), \cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\gamma = 0, \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$6. z = \arcsin \frac{x}{x+y}, P_0(1;1) \quad 7. z = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Вариант 5.

$$1. z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1} \quad 2. z = e^{x-y} \quad 3. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, P_0(2;0)$$

$$4. u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ где } x = t \sin t, y = v \cos t, z = \varphi(v), \text{ найти } \frac{\partial u}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial v}$$

$$5. u = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, A(1;2;2), B(4;2;6) \quad 6. z = x^2 + y^2, P_0(3;-2)$$

$$7. z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$$

Вариант 6.

$$1. z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1} \quad 2. z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 3. z = \operatorname{arctg} \frac{x^3}{8y}, P_0(2;1)$$

$$4. w = \sqrt{u^2 + v^2}, \text{ где } u = \ln(x^2 - y^2), v = \frac{x^2 y}{z^3}, \text{ найти } \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$5. u = x\sqrt{\frac{z}{y}}, A(1;1;8), \cos\alpha = \frac{5}{36}, \cos\gamma = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \beta > \frac{\pi}{2}$$

$$6. z = \sqrt{x^3 + y^2 + 1}, P_0(5;1) \quad 7. z = y\sqrt{x - y^2} - x + 6y$$

Вариант 7.

$$1. z = \ln(x+1) + \ln(y-1) \quad 2. z = \sqrt[3]{x^2 + 2x + y^2}$$

$$3. z = \operatorname{arctg} \frac{y^3}{(x+y)^2 + y}, P_0(3;2)$$

$$4. u = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{y} + \sin z, \text{ где } x = e^{t+y^2}, y = e^z, z = \ln \operatorname{tg} t, \text{ найти } \frac{du}{dt}$$

$$5. u = x^2 - 2xy + y^3 + \frac{1}{z}, A(1;2;1), B(3;0;2) \quad 6. z = x^3 + y^2, P_0(1;1)$$

$$7. z = x^3 + xy^2 + 6xy$$

Вариант 8.

$$1. z = \sqrt{y^2 - x - 1} \quad 2. z = x^2 - y^2 \quad 3. z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}, P_0(3;4)$$

$$4. z = u^{\cos v}, \text{ где } u = \sqrt{1+x^2}, v = \sqrt{1-x^2}, \text{ найти } \frac{dz}{dx}$$

$$5. u = xy + yz, A(2;0;1), \alpha = \beta = \gamma > \frac{\pi}{2} \quad 6. z = \frac{x^3}{\sqrt{y}}, P_0(-1;1)$$

$$7. z = x^3 y^2 (2 - x - y)$$

Вариант 9.

$$1. z = \sqrt{x - y^2 - 1} \quad 2. z = 2x^2 - 3y^2 \quad 3. z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}, P_0(2;0)$$

$$4. z = \ln^2 \frac{x}{y}, \text{ где } y = \varphi(x), \text{ найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{dz}{dx}$$

$$5. u = x^3 + \frac{2x}{y} + \frac{z}{x}, A(1;-1;1), B(3;3;6) \quad 6. z = \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}, P_0(1;1)$$

$$7. z = xy \ln(x^2 + y^2)$$

Вариант 4.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 1) \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\ln e^x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0+} [\ln(\operatorname{ctg} x)]^{x^{1/2}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{tg} 4x)^{\operatorname{arctg} 3x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} (1/\ln x - x/\ln x)$$

Вариант 5.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+3^x)}{\sqrt{3+2x^2}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos 3x}{e^{4x} - \cos 4x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} (9-x^2) \operatorname{tg}(\pi x/6)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 3x} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 5x)^x \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} [\ln(1/x)]^x \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\ln 6x}$$

Вариант 6.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow x/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3^x - 1} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1-} (1-x)^{\ln x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 7x)^{1/\ln 3x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow x/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-x}$$

Вариант 7.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 2^x}{3^x - 5^x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 5x)^x \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1/(x^2-1)}$$

Вариант 8.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} \quad 2. \lim_{x \rightarrow x/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0+} (2x^2)^{1/(1-\cos x)} \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/\sqrt{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\cos x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right]$$

Вариант 9.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^8 + x^3 + 2x + 2}{x^6 - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-8} + 2}{\cos 3x + \cos 4x - 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin(x-1) \operatorname{tg}(\pi x/2)$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 3x)^{\sqrt{x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1-} (\sin \pi x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} (5^x + x)^{1/x}$

Вариант 10.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 + x^6 - 2}{x^{10} - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$ 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x})$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2)^x$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 3x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow \pi-} (\sin x)^{1/(\pi-x)}$

Вариант 11.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$ 1. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{tg} x \ln x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)^{1/x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\operatorname{ctg} x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0+} [\ln(1/x)]^x$

Вариант 12.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 4x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{x} \operatorname{ctg} 6x$ 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{1-x^5} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\sin \pi x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 5x)^{1/x^2}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1/4x)^{\sqrt{x}}$

Вариант 13.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 5x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctg(x-1)}{\sqrt{x^2+x}-2}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg 3x \operatorname{ctg} 4x$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7}{1-x^7} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{x})^{\sin 4x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 7x)^{1/\sin x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1/\ln 4x)^x$

Вариант 14.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin x}{\ln \arcsin 4x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$ 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{11^x - 1} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x})^{\sin 7x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} (\arcsin x)^{\operatorname{ctg} x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 2^x)^{1/x}$

Вариант 15.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arctg 9x}{\ln \arctg 4x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{1/x} - 1)$ 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - \sqrt[3]{x})$
5. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} x)^{7x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 0+} (-\ln x)^{2x}$

Вариант 16.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^x}{x^3 - 27}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0+} (2^x - 1) \ln x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^{\sin 3x}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{1/2x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x)^{\arctg 2x}$

Вариант 17.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{10} - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((2 \arccos x)/\pi)}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln^4(1/x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x^2} - \ln x)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x)^{\ln 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x)^{1/\ln 7x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{6x}}$

Вариант 18.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos x \ln(x-3)}{\ln(e^3 - e^3)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln^3 x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{ctg}(\pi(x-2))$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x)^{\ln 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{1/\arcsin x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{1/x}$

Вариант 19.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{\sin 2\pi x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2 - \arctg x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{5^x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 7x)^{2x^2+x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+7)^{1/x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (3\sqrt{x} + 2x)^{1/\ln x}$

Вариант 20.

- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{5^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \arcsin(x-3) \operatorname{ctg}(x-3)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{4/3} - \ln x^2)$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (\arcsin x)^{\ln 5x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (1-x)^{\ln 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} 3x)^{\ln 3x}$

Вариант 21.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 10}{x^2 - 3x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}{\ln(x-2)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\operatorname{ctg} 5x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 5x - x^2)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2/(1+\ln x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 5x)^{\ln 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)^{\sqrt{x}}$

Вариант 22.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{3+2x} + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln^2 x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{7^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 5x^2)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (1/\sqrt[3]{x})^{\ln 7x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin 8x)^{6x}$

Вариант 23.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \ln(2x + 3^{2x})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1/\sin 5x - 1/2x)$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4-0} (\operatorname{tg} 2x)^{x^{4-x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctg 3x)^{3x}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$

Вариант 24.

- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi/2 - \arcsin(2x/\pi)}{\cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + x}{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} (49 - x^2) \operatorname{tg}(\pi x/14)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(7x-6)} - \frac{2x}{\ln(3x-2)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin 5x)^{\ln 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x})^{\operatorname{ctg} 3x}$

Вариант 25.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{x \sqrt{1-x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln 3x \ln(2x+1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt[3]{x^3})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 3x)^{\arcsin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^{1/(x+2x^2)}$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0+} (1/x)^{1/9x}$$

Вариант 26.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + x)}{\ln(2 + x + x^2)}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin 8x \ln x$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(2x-1)} - \frac{x}{\ln x} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)^{\sqrt{x^2+3x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1/\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 3x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0+} (3x)^{\operatorname{ctg} 8x}$

Вариант 27.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin 5x}{\ln \arcsin 7x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x} \operatorname{ctg} 9x$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{4(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{5(1-\sqrt[3]{x})} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow +0} (x)^{2/x \sin 3x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/\ln(5^x-1)}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0+} (1/x^2)^{\sqrt{x}}$

Вариант 28.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x + \cos(\pi x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \operatorname{tg} 3x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{2x^2} \right)$
5. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\ln x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{x^2+5x})^{1/\sqrt{3x}}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}$

Вариант 29.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x \cos x - \sin x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[4]{x} \ln(x^2 + 5x)$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x^2} - \operatorname{ctg}^2 3x \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 4x)^{1/\ln 4x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{1/(6x^3 + 4x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 7x)^{\sin 9x}$$

Вариант 30.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - \cos 5x)} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^x - 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - 7^{1/x}) \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x - \sqrt[3]{x^4})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} 5x)^{6x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\cos 5x)^{\pi x} \quad 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 5x)^{\sin \frac{2}{x}}$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА»

(приложение 7).

Вариант 1. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^{3/2}}}{x^4}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$

Вариант 2. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{x}$

Вариант 3. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$

Вариант 4. 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{e^x} (\sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x + 1})$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$

Вариант 5. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$

Вариант 6. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1 + x^3)}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}$

Вариант 7. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-2x^2}}$

Вариант 8. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} [x - x^2 \ln(1 + 1/x)]$

Вариант 9. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 + x^2/2 - \cos x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$

Вариант 10. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$

Вариант 11. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 2}{\sin x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 e^{-x} - x^3}{x^4}$

Вариант 12. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \cos x} - \frac{3}{x^4} \right)$

Вариант 13. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$

Вариант 14. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \cos x - x^2/12}$

Вариант 15. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Вариант 16. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{\operatorname{tg} x^2}$

Вариант 17. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}$

Вариант 18. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}$

Вариант 19. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 + x^3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

Вариант 20. 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x - \sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^2} - 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x^2}$

Вариант 21. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{1 - \cos x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x - \ln(1+x)}$

Вариант 22. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^2 \sin^2 x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{x^3}$

Вариант 23. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 3x}$

Вариант 24. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \sin 5x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{x^3}$

Вариант 25. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{3^x + 3^{-x} - 2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x - x}$

Вариант 26. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 \sin 9x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{x^2 \operatorname{tg}^2 5x}$

Вариант 27. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{\sin^2 x \arcsin x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^5 + x^4} - \sqrt[3]{x^5 - x^4})$

Вариант 28. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - x^3/3}{\sin^2 3x \sin^3 4x}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1-2x}}{\sin x}$

Вариант 29. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+5x} - \sqrt{1+6x}}{\operatorname{tg} x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^3 \ln(1+1/x) - x^2 + x/2]$

Вариант 30. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3}$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ
«ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОД-
НОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ» (приложение 8).

Условия задач.

№1 – исследовать на экстремум и построить график функции.

№№ 2, 3 – провести полное исследование и построить график функции.

№ вар.	№ 1	№ 2	№ 3
1.	$y = \frac{1}{4}(x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1)$	$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$	$y = x^2 e^{-x^2}$
2.	$y = (x-1)^2 \cdot (x-3)^3$	$y = \frac{2}{x^2 + 2x}$	$y = x^2 \ln x$
3.	$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 7$	$y = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$	$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$
4.	$y = (x-2)^2 (x-3)^3 \cdot \frac{5^5}{27}$	$y = \frac{2x^2 - 1}{x}$	$y = x + 2 \operatorname{arctg} x$
5.	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$	$y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$	$y = x e^{\frac{-x^2}{2}}$
6.	$y = -\frac{1}{27}(x^2 - 9)^2$	$y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$	$y = (x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}$
7.	$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$	$y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$	$y = \frac{e^{1-x}}{1-x}$
8.	$y = -\frac{1}{16}(x-2)^2 (x+3)^2$	$y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$	$y = x^2 \cdot e^x$

№ вар.	№ 1	№ 2	№ 3
9.	$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$	$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$	$y = e^{2x-x^2}$
10.	$y = (x+1)^2 \cdot (x-3)^3 \cdot \frac{1}{8}$	$y = \frac{1-2x^3}{x^2}$	$y = \sin x - \cos x$
11.	$y = 2x^3 + 4x^2 - 9$	$y = \frac{4x^2}{3+x^2}$	$y = \frac{e^x}{x}$
12.	$y = 32x^2 \cdot (x+1)^2$	$y = \frac{x^3}{x^2+1}$	$y = \frac{x}{\ln x}$
13.	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12$	$y = \frac{x^2-1}{x+2}$	$y = (x+1)^2 \cdot \ln(x+1)$
14.	$y = (x+4)^2 \cdot (x-2)^2 \cdot \frac{1}{27}$	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$	$y = (x-5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$
15.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 5$	$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	$y = \frac{x}{\ln x}$
16.	$y = -\frac{1}{25} \cdot (x^2-5)^2$	$y = \frac{x^3}{x^2-4}$	$y = (x+1) \cdot \ln(x+1)$
17.	$y = 16x(x-1)^3$	$y = \frac{x^2+1}{2-x}$	$y = (x+2) \cdot e^x$
18.	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$	$y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$	$y = 2x - \ln x$
19.	$y = (3x-1)^4 (4x+1)^3$	$y = \frac{(x+2)^2}{x-2}$	$y = (2x-1) \sqrt[3]{(x-2)^2}$

20.	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	$y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$	$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$
21.	$y = 8(x+2)^2(x+1)^2$	$y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$	$y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$
22.	$y = \frac{1}{8}(x^3 + 3x^2 - 9x - 11)$	$y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$	$y = x^2 \cdot e^{-x^2}$
23.	$y = \frac{1}{9}(2x+3)^3(x-1)^2$	$y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$	$y = x \cdot \ln^2 x$
24.	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$	$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	$y = 9x \cdot e^{-x}$
25.	$y = (2x+3)^2(2x+1)^2$	$y = \frac{1-x^3}{x^2}$	$y = x + \arctg x$
26.	$y = x^3 - 3x^2 + 2$	$y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$	$y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$
27.	$y = (x+1)^2(x+3)^2$	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y = (x-2)e^{3-x}$
28.	$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$	$y = \frac{x^2 - 12x + 27}{(x-1)^2}$	$y = 3x \cdot e^x$
29.	$y = (2x-1)^3(3x+1)^2$	$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$	$y = \sin 2x + \sin x$
30.	$y = 4 + 3x^2 - 2x^3$	$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$	$y = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ»

(приложение 9).

Условия задач.

№1 – найти и построить область определения функции двух переменных.

№2 – найти и построить линии уровня функции двух переменных.

№3 – вычислить дифференциал первого порядка функции двух переменных в точке $P_0(x_0; y_0)$.

№4 – найти производную сложной функции.

№5 – вычислить производную по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ для функции $u = f(x; y; z)$ в точке A в направлении, составляющем с осями координат углы α , β и γ – для четных вариантов, и в направлении вектора \vec{AB} – для нечетных вариантов.

№6 – найти и построить вектор градиент функции $z = f(x; y)$ в точке P_0 .

№7 – исследовать на экстремум функцию.

Вариант 1.

1. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$, 2. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 11$ 3. $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 6$, $P_0(1; 3)$

4. $u = \ln \frac{\sin x}{\sqrt{y}} + e^z$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$, $z = \operatorname{tg}^2 t$, найти $\frac{du}{dt}$

$$5. u = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{z}, A(1;1;1), B(0;1;4)$$

$$6. z = \operatorname{arctg}(x+y), P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad 7. z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$$

Вариант 2.

$$1. z = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}} \quad 2. z = 2x^2 - 2x + 4y^2 + 4y - 2$$

$$3. z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, P_0(1;2) \quad 4. z = u^v, \text{ где } u = \sin^2 x, v = \cos 2x,$$

$$\text{найти } \frac{dz}{dx} \quad 5. u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, A(1;2;1), \alpha = \beta = \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$6. z = \sqrt{y^2 - x^2}, P_0(3;-5) \quad 7. z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

Вариант 3.

$$1. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad 2. z = \sqrt{x+y} \quad 3. z = \frac{y}{\sqrt{x}}, P_0(4;3)$$

$$4. z = e^{x^2 y}, \text{ где } y = \varphi(x), \text{ найти } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ и } \frac{dz}{dx}$$

$$5. u = x^{y+x}, A(1;2;1), B(2;0;3) \quad 6. z = \sqrt{x^2 + y^2}, P_0(-3;4)$$

$$7. z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Вариант 4.

$$1. z = \ln \frac{x}{y} \quad 2. z = e^{xy} \quad 3. z = \frac{x}{y^2}, P_0(1;1)$$

$$4. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ где } x = u \sin v, y = v \cos u, \text{ найти } \frac{\partial z}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$5. u = z \sqrt{\frac{x}{y}}, A(1;1;1), \cos \alpha = \frac{3}{5}, \cos \gamma = 0, \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$6. z = \arcsin \frac{x}{x+y}, P_0(1;1) \quad 7. z = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Вариант 5.

$$1. z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1} \quad 2. z = e^{x-y} \quad 3. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, P_0(2;0)$$

$$4. u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ где } x = t \sin t, y = v \cos t, z = \varphi(v), \text{ найти } \frac{\partial u}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial v}$$

$$5. u = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, A(1;2;2), B(4;2;6) \quad 6. z = x^2 + y^2, P_0(3;-2)$$

$$7. z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$$

Вариант 6.

$$1. z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1} \quad 2. z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 3. z = \arctg \frac{x^3}{8y}, P_0(2;1)$$

$$4. w = \sqrt{u^2 + v^2}, \text{ где } u = \ln(x^2 - y^2), v = \frac{x^3 y}{z^3}, \text{ найти } \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$5. u = x^3 \sqrt{\frac{z}{y}}, A(1;1;8), \cos \alpha = \frac{5}{36}, \cos \gamma = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \beta > \frac{\pi}{2}$$

$$6. z = \sqrt{x^3 + y^2 + 1}, P_0(5;1) \quad 7. z = y\sqrt{x - y^2} - x + 6y$$

Вариант 7.

$$1. z = \ln(x+1) + \ln(y-1) \quad 2. z = \sqrt[3]{x^2 + 2x + y^2}$$

$$3. z = \operatorname{arctg} \frac{y^3}{(x+y)^2 + y}, P_0(3;2)$$

$$4. u = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{y} + \sin z, \text{ где } x = e^{t+t^2}, y = e^t, z = \ln \operatorname{tg} t, \text{ найти } \frac{du}{dt}$$

$$5. u = x^2 - 2xy + y^3 + \frac{1}{z}, A(1;2;1), B(3;0;2) \quad 6. z = x^3 + y^2, P_0(1;1)$$

$$7. z = x^3 + xy^2 + 6xy$$

Вариант 8.

$$1. z = \sqrt{y^2 - x - 1} \quad 2. z = x^2 - y^2 \quad 3. z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}, P_0(3;4)$$

$$4. z = u^{\cos v}, \text{ где } u = \sqrt{1 + x^2}, v = \sqrt{1 - x^2}, \text{ найти } \frac{dz}{dx}$$

$$5. u = xy + yz, A(2;0;1), \alpha = \beta = \gamma > \frac{\pi}{2} \quad 6. z = \frac{x^3}{\sqrt{y}}, P_0(-1;1)$$

$$7. z = x^3 y^2 (2 - x - y)$$

Вариант 9.

$$1. z = \sqrt{x - y^2 - 1} \quad 2. z = 2x^2 - 3y^2 \quad 3. z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y}}, P_0(2;0)$$

$$4. z = \ln^2 \frac{x}{y}, \text{ где } y = \varphi(x), \text{ найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{dz}{dx}$$

$$5. u = x^3 + \frac{2x}{y} + \frac{z}{x}, A(1;-1;1), B(3;3;6) \quad 6. z = \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}, P_0(1;1)$$

$$7. z = xy \ln(x^2 + y^2)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} x^3 \ln 2x \quad 5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \arcsin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt{9 + 2x^2} - 3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2 + 2x + 1)(x + 3)}{2x^3 - 6x + 1} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + \operatorname{tg} 2x)^{1/x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 2x)^x$$

Вариант 5.

$$1. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 4x}{2x + 8} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt{9 + 5x} - 3} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} (1 - x^2)^{1/\ln(1+x)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow -0} (x^2)^{\operatorname{tg} 2x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} 2x \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2 \arcsin x - \sin x}$$

Вариант 6.

$$1. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin \left(\pi \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{1 - x} \ln(x - 1) \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 7^{x-1}}{3^{x+1} - 7^x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - e^{x^2}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(4x - 1)}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + 6x)^{\operatorname{ctg} 2x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\cos 3x)^{\frac{1}{2x}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$$

Вариант 7.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (x+1)}{2x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{\ln(1 + \sin 2x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10+3x} - 4}{\sin(3x-6)}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{5x+4} + \sqrt{2x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 3x}{(x-\pi)^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$
8. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 2x)^{x^2}$
9. $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2)^{\frac{1}{\sin 3x}}$
10. $\lim_{x \rightarrow +4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 16}}$

Вариант 8.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2} - 2}{x^2 + x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin 2x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +0} x^3 \ln 7x$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt[3]{27 - \sin x}}{\ln(2x+1)}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{2x^3 + 8x + 3}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{\cos \pi x} - \frac{1}{2}}{\cos(x-1) - 1}$
8. $\lim_{x \rightarrow +0} (1+2x)^{1/\sin 3x}$
9. $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin 3x)^x$
10. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt[3]{x-4} + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 64}}$

Вариант 9.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x} - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +0} e^{-x^2} \ln 4x$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2x^2 + 3}}{\sqrt{3x+2}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{5x} - 1}{3 \arcsin 2x}$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\frac{\pi}{2} - x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (\cos \pi x)^{3/x^2} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (x^3)^{\sqrt{2x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}$$

Вариант 10.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin(\pi(x+2))} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{e^{x^2} - e^{4x^2}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (x - \frac{\pi}{3}) \operatorname{ctg} 3x \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3)(2x + 8)}{\sqrt[3]{2x^6 + 5x + 2}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2-x^2} - 1}{1 + \cos \pi x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} (1 - \sin 2x)^{5/x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 3x)^{\operatorname{tg} 2x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{5x^2} - 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{9+x} - 5}{\sqrt{x} - 2}$$

Вариант 11.

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 8}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin^2 5x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt[3]{x^2}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad 5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2}{\frac{1}{2} - \cos x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x+2}}{\sqrt{5x+4}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x-5)}{\sin 2\pi x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} \left(2 - e^{-x^2} \right)^{\frac{1}{3x^2}} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 4x)^{2x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{4x} - 4}{\sqrt{8+x} - \sqrt{3x}}$$

Вариант 12.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+3x)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 5x \ln 2x \quad 5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{(2x+1)(x+8)} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 4x}{\sqrt{4+2x} - 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{(x-\pi)^2} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (2x)^{3/x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + \operatorname{tg} 3x)^{1/\sin x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^4} - 1}$$

Вариант 13.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{3x^2 - 3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+2x} - 2}{3\operatorname{arctg} x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x^3} \ln 4x \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1-4x^2}{(3x+2)(x-8)} \quad 6. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{3^{2x} - 1}{\ln(2x^2 + 1)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{9+4x} - 5}{\sin(2x-8)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 + 3x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{2x}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{2x})^{\operatorname{tg} 4x}$$

Вариант 14.

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 16} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{2x^2 - 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 \operatorname{ctg} 3x \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{5x+8} + \sqrt{3x+2}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{2-x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} (3x)^{\operatorname{tg} 2x} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2x}} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\sin 3x - x^2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^3 - 27}$$

Вариант 15.

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 - 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos\left(\pi \frac{(x+1)}{2}\right)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} 7x \operatorname{ctg} 2x \quad 5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2 + 5)(x+2)}{4x^2 + 6x + 3} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt[3]{27-x}}{\ln(2x+1)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{2x}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{\ln x^3} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{\sin x}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg} 2x}$$

Вариант 16.

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{\sin^2 \pi x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} x \ln 3x \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-3x} - 2}{\cos 2x - 1} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x+7} + \sqrt[3]{3x^2+1}}{\sqrt{2x+3}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 - \sin \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{e^{2x} - \sqrt[3]{e^2}}{\ln 3x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow +0} (x^3)^{\sqrt{x}}$$

Вариант 17.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt{x^2} - 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 3x^2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\cos^2 x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{2x \ln 5x} \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}(2x+8)}{3x^2 - 2x + 1} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sqrt[4]{16+3x} - 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(7-3x)}{e^{x^2} - e^4} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (2 - e^x)^{1/3x^2} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (1+2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Вариант 18.

$$1. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + 1)}{\sin 4x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg} 7x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x^2 \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{-3x} - 1} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+8)(2x+3)}{4x^2 + 5x + 6}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \ln 3x \operatorname{tg} 3x \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (x^2)^{\sqrt{x}} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x}}$$

Вариант 19.

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}} - \frac{1}{3}}{\sqrt{x + \frac{1}{3}} - \sqrt{2x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{2x} - e^{2x}}{\sin 5x - \sin 3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} 3x \operatorname{ctg} 7x \quad 5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x + 3}{(2x+5)(3x+2)} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{\ln(1+3x^2)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x^2}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (2 - e^x)^{1/x^2} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 2x)^{3x} \quad 10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos x} - 1}{\ln \sin x}$$

Вариант 20.

$$\begin{array}{lll}
 1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{16} - \frac{1}{4}}}{\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \sqrt{2x}} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)} & 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - x^3)}{\sin 2\pi x} \\
 4. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2x} \ln 4x & 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x+2} + 2\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{2 - \sqrt[3]{8 + x^2}} \\
 7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{e^{\sin 2x} - 1} & 8. \lim_{x \rightarrow +0} (3x)^{x^2} & 9. \lim_{x \rightarrow +0} (1 - 3x)^{\operatorname{ctg} 2x} & 10. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x^2 - 4}
 \end{array}$$

Вариант 21.

$$\begin{array}{lll}
 1. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{2x}} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}} & 3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{\sqrt{x+2}} \\
 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} \ln 3x & 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x}}{\sqrt{5x+3}} & 6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{9+4x} - \sqrt[3]{25}}{\sin(3x-12)} \\
 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{\ln(1+3x)} & 8. \lim_{x \rightarrow +0} (x^2)^{\operatorname{tg} 3x} & 9. \lim_{x \rightarrow +0} (1+3x)^{\operatorname{ctg} x} & 10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 4)}{\sin 2\pi x}
 \end{array}$$

Вариант 22.

$$\begin{array}{lll}
 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2+3x}} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4x^2} & 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} \\
 4. \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi)^2 \operatorname{ctg} x & 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 2}{(x+4)(3x^3+4)} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^3} - 2}{\operatorname{arctg} 3x} \\
 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{3^{2x} - 9} & 8. \lim_{x \rightarrow +0} (1+3x^2)^{\frac{1}{\sin 2x}} & 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt[3]{x})^{x^2}
 \end{array}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1+x} - 3}{2 - \sqrt[3]{x}}$$

Вариант 23.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt{x^2+x}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{(\pi - 3x)^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \operatorname{ctg} 2x \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5+3x} + \sqrt{3+2x}}{\sqrt{8+4x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 3x} - 1}{e^{2x} - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{\cos \pi x} - 2}{\ln(4x-7)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 4x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)^{\frac{1}{2x^2}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin 2\pi x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

Вариант 24.

$$1. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln 3x \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{2x^2+8}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^{\cos \pi x} - 2}{\ln(4x-15)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+2x} - 3}{\ln(2x+1)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (1 + \sin 5x)^{1/3x} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt[3]{x})^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+2}}$$

Вариант 25.

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4x+2}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2\pi x}{\ln(1+3x)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\ln(x+2)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\arcsin 7x - \sin 2x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{x+1} - 16}{\sin^2 \pi x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\sqrt[3]{x^2+3}}{x^2+2x+3} \quad 8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{\sin(\pi - 4x)} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (1+2x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 4x)^{\frac{1}{2x}}$$

Вариант 26.

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{4x} + 2}{(2+x)^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{1 - \sqrt{x^3+1}} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{1 - \sin 5x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln 2x^2 \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{4x^2 + 3x + 2} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{\sin^2 x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2^{3x} - 2}{\ln(5x)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (1 - \sin 4x)^{\frac{4}{x}} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (x^2)^{3x} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{3x} - 3^{2x}}{2x - \arcsin 4x}$$

Вариант 27.

$$1. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+14} - \sqrt{8x}}{x^2 - 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x^2}{\ln(1+4x)} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{\ln(3x-5)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} e^{-2x} \ln 3x \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 3}{(3x^2 + 5)(4x^2 + 1)} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{2x} - 7^{-x}}{\sin 4x - 5x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\ln(1 + \sin 2x)} \quad 8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+11} - 3}{4^{x+1} - 1} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +0} (x^2)^{3x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +0} (2 - \cos 2x)^{1/2x}$$

Вариант 28.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - x - 6}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{\sin(\pi + 2x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\cos x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1 - \frac{x}{3}} \ln(3 - x)$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{2^{x+2} + 5^{x+1}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1 - e^{x^2}}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\ln(8x - 1)}{\sqrt{1 - \sin 2\pi x}}$
8. $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + 5x)^{\operatorname{ctg} 2x}$
9. $\lim_{x \rightarrow +0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{3x-3} - 3^{2x^3}}{\sqrt[3]{4 - 3x} - 1}$

Вариант 29.

1. $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{10 + 2x} - 4}{\sqrt[3]{x} - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin(\pi(2x + 1))}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 4x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x} \ln(4x - 1)$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^x + 5^{x+4}}{3^{x+1} - 6^{3x-1}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x + \cos 2x - 1}{1 - e^{x^2}}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\ln(6x - 1)}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{9}}}$
8. $\lim_{x \rightarrow +0} (3x)^{\operatorname{ctg} 7x}$
9. $\lim_{x \rightarrow +0} (\cos 3x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{6x}}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 3^{-2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 4x}$

Вариант 30.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - 4x + x^2} - (x + 2)}{8x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 5x}{2^{-7x^2} - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{6x^3} - 1}{\ln(1 + \sin^3 x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 + 6x} - 4}{\sin(3x - 3)}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{7x + 2}}{\sqrt{5x - 14} + \sqrt{8x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin^2 2x - \operatorname{tg}^2 8x}{(x - 2\pi)^2}$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad 8. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} 8x)^{x^2} \quad 9. \lim_{x \rightarrow +1} (x^2 - 1)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 8} + 2}$$

Задачи на вычисление производной (приложение 12)

1. Найти производные функций $y = f(x)$.
2. Найти производные второго порядка функции $y = f(x)$.
3. Проверить, является ли функция $y = f(x)$ решением дифференциального уравнения.

Вариант 1.

$$1. y_1 = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 2}{15\sqrt{1+x^2}}, y_2 = x \arcsin \frac{2}{x} + \ln(x + \sqrt{2-x^3}),$$

$$y_3 = \frac{\sin^2 3x}{2 \cos(6x+1)}, y_4 = (\ln \operatorname{arccos} x) \sqrt[3]{1+e^{-4x}}, y_5 = \operatorname{arctg} \left(\frac{7x-1}{3x^2} \right).$$

$$y_6 = (\sin 2x)^{x^2+1}, y_7 = (x^3 + 3x^2) \sqrt[4]{3x^2+1} + 3 \cdot 5^{\sqrt{(x-1)^2}}, y_8 = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}$$

$$2. y = x \cos 2x^2. \quad 3. y = \frac{x}{\cos x}, \text{ если } y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Вариант 2.

$$1. y_1 = \frac{\sqrt{1-3x-x^2}}{5x^4+2x-3}, y_2 = \operatorname{tg} \left(2 \arccos \sqrt{1+4x^2} \right), y_3 = \frac{3 \cos 4x}{\sin^2(8x+2)},$$

$$y_4 = \ln \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{3x}}, y_5 = \frac{x^3}{4} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3x+2}{x^2}, y_6 = (\operatorname{tg} 2x)^{\sin x},$$

$$y_7 = 5 \log_3 \frac{x}{\sqrt{6x+3}} - \frac{\sqrt[5]{(1+2x)^3}}{x^2}, \quad y_8 = (1-3x^2)^{4x}$$

$$2. y = \operatorname{ctg}(4x^2 + 1).$$

$$3. y = \frac{x}{x-1} + x^2, \text{ если } x(x-1)y' + y = x^2(2x-1).$$

Вариант 3.

$$1. y_1 = \frac{x^4 - 8x^2}{3\sqrt{x^2 - 4}}, \quad y_2 = \sqrt[3]{(1-2x^2)} + \ln(x + \sqrt[3]{1+2x}), \quad y_3 = \frac{8\operatorname{tg}^2(2x+1)}{\sin 4x},$$

$$y_4 = \operatorname{arctg} \ln(3x^2 + 8), \quad y_5 = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^3 + 16x + 1}}, \quad y_6 = (x^3)^{\cos 2x},$$

$$y_7 = \frac{x^3 \arcsin 2x}{x^2 + 8} + \frac{x^2 + 5x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y_8 = (\operatorname{ctg} 3x)^{x^4 + 1}.$$

$$2. y = x^2 \sin(5x - 3). \quad 3. y = -x \cos x + 3x, \text{ если } xy' = y + x^2 \sin x.$$

Вариант 4.

$$1. y_1 = \frac{\sqrt[4]{2x+3}}{4x^2 - 8x + 2}, \quad y_2 = x^2 \operatorname{arctg} 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt[3]{x^3 - 2x + 1},$$

$$y_3 = \frac{\sin^2(4x+3)}{2\operatorname{ctg} 3x}, \quad y_4 = \log_2^2(x + 2\cos x), \quad y_5 = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{5x^2 + 3} + \frac{1}{3\sqrt{x}},$$

$$y_6 = (\cos 2x)^{x^2}, \quad y_7 = 3 \arcsin \frac{3x^2}{4x+3} + 2\sqrt[3]{(4x^2+2)^2}, \quad y_8 = (1-x^3)^{\operatorname{tg} 3x}$$

$$2. y = (2x+3) \ln 2x. \quad 3. y = e^{x+x^2} + 2e^x, \text{ если } y' - y = 2xe^{x+x^2}$$

Вариант 5.

$$1. y_1 = \frac{(1+x^3)\sqrt{1+x^2}}{12x^4+5}, y_2 = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^2}}, y_3 = \frac{\cos^2 6x}{3\sin(12x+1)},$$

$$y_4 = 2x(\cos \ln x + \sin \ln x), y_5 = (\operatorname{ctg} 3x)^{\sqrt{x}},$$

$$y_6 = (2x^2+3)\sqrt{2+x-x^2} + 3\arcsin \frac{2x-1}{3x},$$

$$y_7 = \frac{3}{\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} 2x} - \ln(x + \sqrt[5]{1+x^6}), y_8 = (x^4+3)^{\ln 2x}.$$

$$2. y = \frac{\ln 2x}{x^3}, \quad 3. y = (x^2+1)e^{x^2}, \text{ если } y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

Вариант 6.

$$1. y_1 = \frac{\sqrt[3]{1+3x^5}}{2x^4-3x^2+1}, y_2 = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}} + \sin \ln 2x, y_3 = \frac{\operatorname{ctg}^3 2x}{5\sin(3x+6)},$$

$$y_4 = x(\operatorname{tg} \ln x + \cos 2x), y_5 = \arcsin \left(\operatorname{ctg} \frac{x^2}{2} + \cos 2x \right), y_6 = (\arccos x)^{x^2},$$

$$y_7 = \frac{(x+3)\sqrt[5]{2x}}{x^3+5}, y_8 = (1-4x^2)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$2. y = x \operatorname{tg} 2x, \quad 3. y = \frac{x}{\cos x}, \text{ если } y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Вариант 7.

$$1. y_1 = \frac{(x^6)\sqrt{(2x+3)^3}}{3-x^2}, y_2 = \operatorname{arctg} \sin 2x + \sin x \ln \cos x,$$

$$y_3 = \frac{\sin^2(3x+5)}{2\operatorname{ctg} 7x}, y_4 = 3^{\ln \operatorname{ctg} 2x}, y_5 = x^3 \arccos \sqrt{x} - \frac{\sqrt[3]{5x^2+8x+3}}{3x^2-1}.$$

$$y_6 = (\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{2}}, y_7 = \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\ln(2x + \sqrt{1-x^2})}, y_8 = (x^2 + 5)^{\cos 3x}$$

$$2. y = (2x^3 + 1) \sin x. \quad 3. y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}, \text{ если } \ln x + y^3 - 3xy^2 y' = 0.$$

Вариант 8.

$$1. y_1 = \frac{x^2 + 3}{2x\sqrt{1+5x^3}}, y_2 = \arccos \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x}}, y_3 = \frac{4\operatorname{ctg}^2 6x}{\cos(5-2x)},$$

$$y_4 = \ln \operatorname{arcsin} x \sqrt{1 - e^{-2x}}, y_5 = 3\operatorname{arctg}(2x - 5) \sqrt{x^2 + 3x - 1},$$

$$y_6 = (x^3 + 2)^{\sin 3x}, y_7 = \ln(x + \sqrt[3]{1-x^3}) + \frac{x}{\log_2 x^2}, y_8 = (\cos 5x)^{x^2}$$

$$2. y = (1 - x^2) e^{2x}. \quad 3. y = \operatorname{tg} \ln 3x, \text{ если } y' = \frac{1+y^2}{x}.$$

Вариант 9.

$$1. y_1 = \frac{2x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{1-x^2}}, y_2 = \operatorname{ctg}(3\operatorname{arcsin} \sqrt{2x+5}), y_3 = \frac{3\cos^2(1-3x)}{\sin 8x},$$

$$y_4 = \operatorname{arcsin}\left(\ln \frac{1}{2\sqrt{x}}\right), y_5 = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 1}{2x - 1} - \frac{1}{3} \arccos \frac{5x - 1}{2x^2}, y_6 = (\operatorname{tg} 3x)^{x^2 + 5},$$

$$y_7 = 4 \ln \frac{1 + \sqrt[3]{1+x^4}}{2x} - \frac{\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{x^3}, y_8 = (x^3)^{\operatorname{arctg} 2x}$$

$$2. y = \frac{x^2}{\log_3 2x}. \quad 3. y = \frac{x}{x-1} + x^2, \text{ если } x(x-1)y' + y = x^2(2x-1).$$

Вариант 10.

$$1. y_1 = \frac{\sqrt{(2-x^3)^2}}{4-3x^2}, y_2 = \cos \ln(x^2 + 1) + \cos \sin \sqrt[3]{x}, y_3 = \frac{3\operatorname{ctg}^3(2x+3)}{\sin 4x},$$

$$y_4 = \ln \left(\arccos \frac{2}{\sqrt{3x}} \right), y_5 = (\sin 2x)^{\frac{1}{x^2}}, y_6 = \frac{\arcsin 5x}{x^2 \sqrt{\cos 2x}},$$

$$y_7 = \frac{1}{4} \ln \frac{x+2}{3x+1} - \operatorname{arctg} \frac{3x^2-1}{2x^3}, y_8 = (x^2+3x)^{\log_2 4x}.$$

$$2. y = 3^{-x}(3x-1). \quad 3. y = xe^{\frac{x^2}{2}}, \text{ если } xy' = y(1-x^2).$$

Вариант 11.

$$1. y_1 = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt[4]{1-x^3}}, y_2 = \frac{\ln 2x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2}, y_3 = \frac{8 \cos 5x}{\operatorname{tg}^2(2x+1)},$$

$$y_4 = \ln \operatorname{ctg}(3x + \sin 5x), y_5 = \arcsin \sqrt{\frac{2x}{x+3}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2x}},$$

$$y_6 = (x^2+3)^{\lg 2x}, y_7 = \log_2 \frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{3x+1} + \frac{x\sqrt{x^2+2}}{\sin(5x+3)}, y_8 = (\sin^2 x)^{x^2}$$

$$2. y = \frac{\ln 2x}{x^3}. \quad 3. y = x(2 - \ln x), \text{ если } \frac{x-y}{x} = -y'.$$

Вариант 12.

$$1. y_1 = \frac{(x^2-2)\sqrt{1+x^2}}{2x^3}, y_2 = \arcsin 2^x + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{-x}+1}),$$

$$y_3 = \frac{\sin^2(5x+2)}{3 \operatorname{ctg} 2x}, y_4 = \log_3 \sin \frac{2x+4}{3x+2},$$

$$y_5 = \frac{2x+1}{x} \sqrt[3]{5x-x^4} - \arcsin \sqrt{\frac{2x+1}{3x}}, y_6 = (\arcsin 2x)^{x^2},$$

$$y_7 = \frac{1}{8} \ln \frac{x^3+3x+2}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{4x}, y_8 = (x^5+2)^{\lg(3x+1)}$$

$$2. y = (x^2 - 2x)e^{-2x}.$$

$$3. y = \ln(2 + e^x), \text{ если } y' = e^{x-y}.$$

Вариант 13.

$$1. y_1 = \frac{1+5x^2-x^3}{2\sqrt[3]{1+3x^2}}, y_2 = x^2\sqrt{2-4x^3} + 4\arcsin^3 \frac{x}{2}, y_3 = \frac{2\operatorname{tg}^4 3x}{\cos(1-8x)},$$

$$y_4 = \ln^2 \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}}, y_5 = \frac{(x+3)\sqrt{3x+2}}{x^2+3} + \frac{\operatorname{arctg} x^3}{1-x}, y_6 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{\operatorname{ctg} 2x},$$

$$y_7 = 5\operatorname{ctg}^3 \frac{2}{4x+7} - \sqrt[5]{(11+4x^2)^3}, y_8 = (\sin 2x)^{\sqrt{x+5}}$$

$$2. y = \ln \frac{2-x}{3+2x}.$$

$$3. y = \frac{7}{\cos x}, \text{ если } y' - \operatorname{tg} xy = 0.$$

Вариант 14.

$$1. y_1 = \frac{(3x^2+2)\sqrt{x-1}}{5x^3-1}, y_2 = \ln 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{\sin 3x}, y_3 = \frac{\cos^3(2x+3)}{4\sin(1-5x)},$$

$$y_4 = \ln \sqrt[3]{1+2\operatorname{tg} 3x}, y_5 = (2x^2+6x-5)e^{-2x^2}, y_6 = (x^2+2)^{\arcsin x},$$

$$y_7 = 3\arccos \sqrt{\frac{2}{3x+2}} + \sqrt[3]{(3-6x)^2}, y_8 = (\cos 2x)^{x^2+4}.$$

$$2. y = (5x-1)\log_2 2x. \quad 3. y = 2 + 4\sqrt{1-x^2}, \text{ если } (1-x^2)y' + xy = 2x.$$

Вариант 15.

$$1. y_1 = \frac{5x^3+2}{\sqrt{1-3x^2}}, y_2 = \sqrt[3]{1+x^2}\operatorname{arctg} 2x + \ln(3\operatorname{tg}^2 x), y_3 = \frac{8\operatorname{tg}^3(2x+3)}{\cos 3x},$$

$$y_4 = \ln(\operatorname{ctg} \sqrt{x} + \sqrt[5]{1+\operatorname{tg} 3x}), y_5 = \arccos \frac{3x^2-4}{e^{3x}}, y_6 = (x^4-3x)^{\sin 4x},$$

$$y_7 = \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1+x^2}} + \log_3^2(1-2x), y_8 = (\cos 3x)^{\lg(4x+1)}$$

$$2. y = (2x^2 - 7) \ln(3x - 1).$$

$$1. y = -x \cos x + 3x, \text{ если } xy' = y + x^2 \sin x$$

Вариант 16.

$$1. y_1 = \frac{x^5 - 8x^3 + 5}{\sqrt{8 - x^3}}, y_2 = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 3x} - \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\sin(3x + 1)}, y_3 = \frac{\cos^2 2x}{7 \sin(3x + 2)},$$

$$y_4 = \ln \ln \sin \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right), y_5 = (\operatorname{tg} 3x)^{3x^2 - 1},$$

$$y_6 = \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{1 - 2x}}{3\sqrt{x}} + \log \cos^3 2x, y_7 = \frac{x^3 \arccos(8x + 2)}{\sqrt[4]{(1 - x)^2}},$$

$$y_8 = (x^5 + 2x)^{\sin 2x}.$$

$$2. y = \frac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x - 1}}.$$

$$y = \frac{\sin x}{x}, \text{ если } xy' + y = \cos x.$$

Вариант 17.

$$1. y_1 = \frac{\sqrt[3]{8 - x^2}}{3x^3 + 2x + 1}, y_2 = \arcsin \frac{x^2 - 1}{2x} + \ln(5 - 6x), y_3 = \frac{\sin^3(2x + 5)}{7 \operatorname{tg} 4x},$$

$$y_4 = \log_5 \sqrt{\frac{3x - 2}{1 - 4x}}, y_5 = x^2 + \arccos \frac{x^2 - 6}{\sqrt{x^4 + 16x}}, y_6 = (\arcsin 2x)^{1 - x},$$

$$y_7 = \frac{x^2 \arcsin 5x}{\sqrt[3]{1 - 2x}} + \frac{x^2 - 2x}{3\sqrt{1 - 4x^3}}, y_8 = (x^3 - 2x)^{\sin \sqrt{x}}.$$

$$2. y = x^2 \cos(3 - 7x). \quad 3. y = -x \cos x + 3x, \text{ если } xy' = y + x^2 \sin x.$$

Вариант 18.

$$1. y_1 = \frac{1 - 3x^2 - 5x^3}{\sqrt[3]{2x + 3}}, y_2 = 2x \sin^2 \ln x + \cos \ln 2x, y_3 = \frac{\operatorname{ctg}^3 5x}{3 \sin(2x + 6)},$$

$$y_4 = (\ln \cos^3 3x + \operatorname{tg} 3x)x^2, \quad y_5 = \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{x}{3} + \cos \sqrt{x}}{3x}, \quad y_6 = (\sqrt{x+3})^{\operatorname{arcsin} 2x},$$

$$y_7 = \sqrt[3]{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} \log_5 \sqrt{\frac{3x+5}{2-3x}}, \quad y_8 = (\ln 5x)^{x^2+3}$$

$$2. y = (3-x^2) \ln x^2. \quad 3. y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}, \text{ если } 8xy' - y = \frac{-1}{y^3 \sqrt{x+1}}.$$

Вариант 19.

$$1. y_1 = \frac{(2x^3+3)\sqrt{3-2x}}{9x^3}, \quad y_2 = \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x^2+1} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{3x}},$$

$$y_3 = \frac{3 \sin^2(5x+3)}{\operatorname{ctg} 7x}, \quad y_4 = \ln \ln \operatorname{tg}(5x+2),$$

$$y_5 = \arccos \sqrt{\frac{3x+2}{1-5x}} + \operatorname{arctg} e^{-2x}, \quad y_6 = (x^2+8)^{\cos 2x},$$

$$y_7 = \log_2 \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^2}} - \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{x^2+2} \right), \quad y_8 = (\operatorname{tg}(2x+3))^{1-2x}$$

$$2. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x. \quad 3. y = 3 + \frac{7x}{3x+1}, \text{ если } y - xy' = 3(1+x^2y').$$

Вариант 20.

$$1. y_1 = \frac{x^3-3x+2}{x\sqrt{x^2+5}}, \quad y_2 = \ln \frac{1}{x^2+3} - \operatorname{tg} \ln(3x+1), \quad y_3 = \frac{\cos^3(2x+7)}{7 \sin(1-5x)},$$

$$y_4 = \log_4 \operatorname{ctg} \frac{2x+1}{1-x}, \quad y_5 = \arccos \frac{x+3}{x^2} + \arcsin \frac{1}{x+5}, \quad y_6 = (\sin 3x)^{x^2+3},$$

$$y_7 = \frac{\ln \sqrt[3]{1-3x^2}}{5x^2+7x+2} - \frac{15}{2\sqrt{7x+4}}, \quad y_8 = (\sqrt{5x})^{\ln 3x}$$

$$2. y = (4x+3)e^{-3x}.$$

$$3. y = -\sqrt{\frac{2}{x^2}} - 1, \text{ если } 1 + y^2 + xy' = 0.$$

Вариант 21.

$$1. y_1 = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^3+2}, y_2 = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right), y_3 = \frac{\sin(6x+3)}{5\operatorname{tg}^2 7x},$$

$$y_4 = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-3x}}, y_5 = \arcsin(3x^2+8) + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}, y_6 = (\cos x)^{\sqrt{x}},$$

$$y_7 = \frac{2\log_3(1-7x)}{\operatorname{ctg}(2x+3)}, y_8 = (4x^3-7)^{\sin 2x}.$$

$$2. y = \frac{\ln(3+x)}{x+2}.$$

$$3. y = \sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2} + 1, \text{ если } (1+e^x)yy' = e^x.$$

Вариант 22.

$$1. y_1 = \frac{x^3-4x^2+1}{\sqrt[3]{1+x^2}}, y_2 = x^2 \arccos 3\sqrt{x} + \ln(x - \sqrt{1-x^2}),$$

$$y_3 = \frac{\cos^2(3x+1)}{2\sin 4x}, y_4 = \log_6^2(x + \sin 2x),$$

$$y_5 = \operatorname{arctg} \frac{7x+3}{\sqrt{2x-1}} + \arccos \sqrt{3x}, y_6 = \left(\frac{1}{2x}\right)^{\operatorname{ctg} 3x}, y_7 = \frac{3x \arcsin(2x+1)}{e^{-2x}},$$

$$y_8 = (\cos 3x)^{\sqrt{2x}}$$

$$2. y = \frac{1}{x} \sin 2x.$$

$$3. y = (2+x)(1+2x), \text{ если } y - xy' = 2(1+x^2y')$$

Вариант 23.

$$1. y_1 = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^3(4x^2 + 3)}, y_2 = \sqrt[3]{1 + \sin 2x} + \ln(x + \sqrt{1 + 3x}),$$

$$y_3 = \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{4 \cos(1 + 7x)}, y_4 = \log_2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5x}}, y_5 = \arccos \frac{\sqrt{1 - x^2} - 16x}{2x + 3} + e^{3x},$$

$$y_6 = (x^3 + 2)^{\sin 4x}, y_7 = \sqrt[3]{1 + 3x}(x^3 + 2x) + 5^{7-2x}, y_8 = (\operatorname{ctg} 7x)^{\sqrt{2x}}$$

$$2. y = x^2 \ln(3 - x).$$

$$3. y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \text{ если } y' \sin x = y \ln y$$

Вариант 24.

$$1. y_1 = \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{2 + 3x}}, y_2 = x^2 \arctg \sqrt[3]{1 + x^2} - \sin^3 2x, y_3 = \frac{\cos^2 7x}{3 \sin(2x + 1)},$$

$$y_4 = \ln(e^{2x} + \sqrt{1 - e^{-3x}}), y_5 = \arccos \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{4 - x^2}} + \arctg \sqrt{2x},$$

$$y_6 = (\arcsin x)^{x^2 + 3}, y_7 = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x \operatorname{ctg} 3x} + \frac{\ln(4x + 1)}{\sqrt{1 + x^2}}, y_8 = (x \sin x)^{x^2}$$

$$2. y = e^{\frac{x}{2}} \sin 2x.$$

$$3. y = \sqrt{x^2 - 3x}, \text{ если } y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

Вариант 25.

$$1. y_1 = \frac{(1 - x^5)\sqrt{1 + x^6}}{4x^2 + 2}, y_2 = \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^3}}, y_3 = \ln \frac{\ln 2x}{\cos \frac{3}{x}},$$

$$y_4 = \frac{\operatorname{ctg}^2(3x + 2)}{4 \operatorname{tg} 7x}, y_5 = \operatorname{arccctg} \sqrt[3]{1 - 7x} + \log_3 \sqrt{\frac{2x + 3}{4 - x}}.$$

$$y_6 = (\ln 2x)^{\sqrt{x}}, y_7 = \frac{\arccos(3x^2 + 2)}{e^{-2x}}, y_8 = (x^2 + 3x)^{\cos(4x+1)}$$

$$1. y = (5x - 8)3^{1-x^2}.$$

$$3. y = -\frac{1}{3x+5}, \text{ если } y' = 3y^2.$$

Вариант 26.

$$1. y_1 = \frac{x^3 - 2x^2}{\sqrt{2-3x} \cdot x^4}, y_2 = 3x \ln(x + \sqrt{x^2 + 8}) - \cos^2 3x,$$

$$y_3 = \frac{2 \sin^3 5x}{\ln \operatorname{tg} x}, y_4 = \log_3 \sqrt[4]{\frac{1-2x}{8+x}}, y_5 = \frac{2+x^5}{x^3} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$y_6 = (\arccos 2x)^{x^2}, y_7 = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \frac{5}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}, y_8 = (x^5 - 3x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$2. y = e^{-2x} \cos 3x.$$

$$3. y = x\sqrt{1-x^2}, \text{ если } yy' = x - 2x^3.$$

Вариант 27.

$$1. y_1 = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^3 + 3x - 2}, y_2 = \operatorname{arctg}^2 \cos x + \cos \ln \sin x, y_3 = \frac{\operatorname{ctg}^2(3x+1)}{4 \cos(1-x)},$$

$$y_4 = \log_3^2(3x + 2 \cos 3x), y_5 = (x^3 - 3x^2 + 1) \operatorname{arctg}^3 \sqrt{\frac{1-3x}{2x+1}},$$

$$y_6 = \frac{\arccos(3x^2 - 5)}{5 \sin(2x+1)}, y_7 = (1-2x)^{\operatorname{ctg} 3x}, y_8 = (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$2. y = \frac{\ln 3x}{x^3 + 3}.$$

$$3. y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \text{ если } y' + 2y = e^x.$$

Вариант 28.

$$1. y_1 = \frac{x^3 + 8x + 1}{x\sqrt{x^3 + 8}}, y_2 = \arccos\left(\frac{x^3 + 2}{3x^2}\right) - \ln \ln \frac{1}{x}, y_3 = \frac{\sin^2 3x}{7 \cos(2x+3)},$$

$$y_4 = \ln \left(\arcsin \sqrt{1 - e^{-5x}} \right), y_5 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} x}{4x^2} \right), y_6 = (x^2 + 3x)^{\operatorname{ctg} 2x},$$

$$y_7 = 2^{7x^3+1} + \frac{\sqrt[3]{1-4x^2}}{\log_4(2x+1)}, y_8 = (\sin 4x)^{x^3+2}$$

$$2. y = 2x \cos(3x+1).$$

$$3. y = x(3 - \ln x), \text{ если } \frac{x-y}{x} = -y'.$$

Вариант 29.

$$1. y_1 = \frac{13\sqrt{1-x}}{5x^2-3x+2}, y_2 = x^2 \arccos \frac{1}{x} + \log_3 \left(x + 2\sqrt{x^2-1} \right),$$

$$y_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2(4x+1)}{\cos 7x}, y_4 = \ln \arcsin \sqrt{1+e^{-x}}, y_5 = \operatorname{arccotg} \sqrt[3]{\frac{1-2x}{3x+4}},$$

$$y_6 = (\operatorname{tg} 4x)^{x^3+2x}, y_7 = (x^3+5)\sqrt[3]{x^2+1} + 3\ln \left(x + \sqrt[3]{(1-x)^2} \right),$$

$$y_8 = (\sin 3x)^{\cos x}.$$

$$2. y = x \ln(1-3x).$$

$$3. y = \frac{\sin x}{x}, \text{ если } xy' + y = \cos x.$$

Вариант 30.

$$1. y_1 = \frac{(x+2)\sqrt{1-x^2}}{2x^3}, y_2 = \arcsin e^{-2x} + \ln \left(e^{-x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1} \right),$$

$$y_3 = \frac{\cos^3 3x}{2\operatorname{ctg}(4x+3)}, y_4 = \log_5 \sin \frac{1-2x}{3+4x}, y_5 = \frac{1}{5} \ln \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1+x^3}} + \operatorname{tg} \frac{3x}{1-x^2},$$

$$y_6 = (\sqrt{x+2})^{\operatorname{ctg} 2x}, y_7 = \frac{3x \arcsin(5x+1)}{e^{-6x}}, y_8 = (\cos 3x)^{1-x^2}$$

$$2. y = (1-x^2-2x)e^{3x+2}.$$

$$3. y = \ln(7+e^x), \text{ если } y' = e^{x-y}$$

Исследование функции и построение графика
 (приложение 13)

Вариант

$$1. y = \frac{x^3 - 4}{x^3}, y = x \ln 2x$$

$$3. y = \frac{2}{x^3 + 2x}, y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$$

$$5. y = \frac{2x^3 + 1}{x}, y = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$7. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2, y = \frac{2x}{\ln x}$$

$$9. y = \frac{4x}{(x+1)^2}, y = (2x+3)e^{-2(x+1)}$$

$$11. y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, y = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$13. y = \frac{(x+1)^2}{x^2}, y = -2x \ln x$$

$$15. y = \frac{x^3}{(x-1)^2}, y = \frac{\ln 2x}{x^2}$$

$$17. y = \frac{2x^3 - 1}{x^3}, y = x + \frac{\ln x}{x}$$

$$19. y = \frac{3x-2}{x^3}, y = (x-2)e^{3-x}$$

$$21. y = \frac{1-2x^3}{x^3}, y = -(2x+1)e^{2x+1}$$

$$23. y = \frac{(x-1)^2}{x^3}, y = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$$

$$25. y = \frac{x^3 - 8}{x^3}, y = \frac{e^x}{(x-1)^2}$$

Вариант

$$2. y = \frac{4x+3}{x^2}, y = x^2 e^{-2x}$$

$$4. y = \frac{4-x^3}{x^2}, y = \frac{\ln 3x}{x}$$

$$6. y = \frac{x^2}{9-x^2}, y = x^2 \ln 3x$$

$$8. y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}, y = \frac{e^{2x+1}}{x}$$

$$10. y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}, y = x \ln^2 x$$

$$12. y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}, y = (3-x)e^{x-2}$$

$$14. y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}, y = -2xe^{-x^2}$$

$$16. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}, y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$$

$$18. y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, y = x^2 e^{-x^2}$$

$$20. y = \frac{2}{x^4 - 1}, y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}$$

$$22. y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}, y = \frac{-x}{\ln 2x}$$

$$24. y = \frac{(x-3)^2}{2x-2}, y = (x+1)^2 e^{-x}$$

$$26. y = \frac{x^2 + 1}{1-x^2}, y = \frac{\ln 2(x-1)}{x-1}$$

Вариант

$$27. y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2, y = \frac{-3x}{\ln 2x}$$

$$29. y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}, y = -2x \ln 3x$$

Вариант

$$28. y = \frac{-8x}{x^2 + 4}, y = (x + 1)e^{-3x}$$

$$30. y = \frac{x^2}{x^3 - 1}, y = (2x - 1)e^{2(1-x)}$$

Программа по математическому анализу за первый семестр
(приложение 15)

1. Числовая последовательность (ч.п.) и ее предел.
2. Теоремы о пределах ч.п..
3. Бесконечно малые и бесконечно большие ч.п. и их свойства.
4. Теорема о связи между ч.п. и ее пределом.
5. Монотонные ч.п.. Число e .
6. Правила предельного перехода: предел суммы, произведения, частного.
7. Правила предельного перехода: предельный переход в неравенствах, предел промежуточной последовательности.
8. Определение предела функции по Коши и Гейне.
9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
10. Теоремы о пределах функции.
11. Правила предельного перехода в равенствах и неравенствах.
12. Первый и второй замечательные пределы.
13. Сравнение бесконечно малых.
14. Эквивалентные бесконечно малые, таблица основных эквивалентностей.
15. Два определения непрерывности функции в точке.
16. Арифметические операции над непрерывными функциями.
17. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.
18. Производная, ее геометрический и механический смысл.
19. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
20. Непрерывность функции, имеющей производную.
21. Производная суммы, произведения, частного, сложной функции.
22. Производная обратной функции.
23. Дифференцируемая функция и дифференциал. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.
24. Свойство инвариантности формы первого дифференциала.

- 14 Производная параметрически заданной функции.
- 15 Производные и дифференциалы высших порядков.
- 16 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
- 17 Правило Лопиталя.
- 18 Формула Тейлора. Таблица основных разложений.
- 19 Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.
- 20 Достаточные условия экстремума функции.
- 21 Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке.
- 22 Выпуклость и вогнутость графика функции.
- 23 Точки перегиба графика функции.
- 24 Асимптоты графика функции.
- 25 Функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня.
- 26 Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
- 27 Частные производные первого и высших порядков.
- 28 Дифференциал первого и высших порядков.
- 29 Производная сложной функции, неявно заданной функции.
- 30 Формула Тейлора.
- 31 Производная по направлению и градиент.
- 32 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
- 33 Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие, достаточные условия экстремума.
- 34 Наибольшее и наибольшее значения непрерывной функции в замкнутой ограниченной области.
- 35 Условный экстремум.

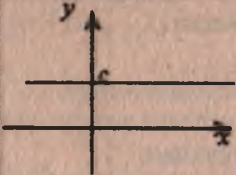
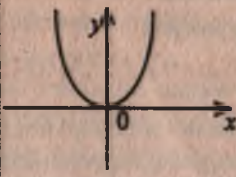
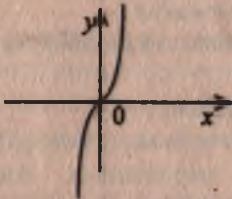
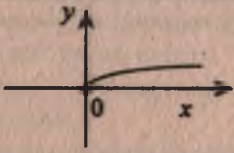
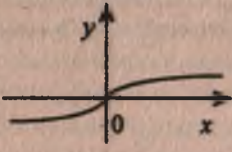
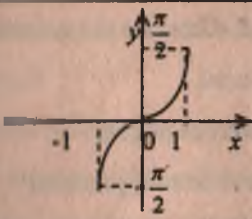
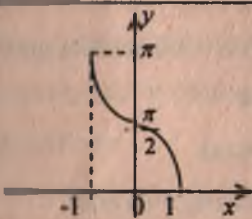
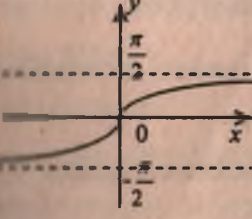
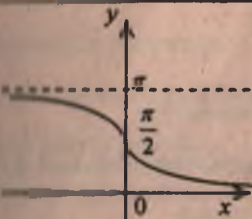
№ Функция	График функции	Область определения	Область изменения	Другие свойства
1. $y = c$		$(-\infty; +\infty)$	$\{c\}$	
2. $y = x^6$ $\alpha = 2n$ $n \in \mathbb{N}$ $y = x^{2n}$		$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	четная
$\alpha = 2n+1$ $n \in \mathbb{N}$ $y = x^{2n+1}$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	нечетная
$\alpha = \frac{1}{2n}$ $n \in \mathbb{N}$ $y = \sqrt[2n]{x}$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	
$\alpha = \frac{1}{2n+1}$ $n \in \mathbb{N}$ $y = \sqrt[2n+1]{x}$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	нечетная

Таблица основных элементарных функций (приложение 15).

Функция	График функции	Область определения	Область изменения	Другие свойства
$\alpha = -2n$ $n \in \mathbb{N}$ $y = \frac{1}{x^{2n}}$		$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	четная
$\alpha = -(2n-1)$ $n \in \mathbb{N}$ $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$		$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	нечетная
$\alpha = m/n$ $m \neq 1, n \neq 1$ $m, n \in \mathbb{N}$ $y = x^{m/n}$	 $y = x^{2/3}$ $y = x^{3/2}$	а) $(-\infty; +\infty)$ б) $[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	четная
$\alpha = 1$ $y = x$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	нечетная
$y = a^x$ $a > 0, a \neq 1$	 $0 < a < 1$ $a > 1$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	

№ Функция	График функции	Область опре- деления	Область изменения	Другие свойст- ва
4. $y = \log_a x$ $a > 0, a \neq 1$		$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	
5. $y = \sin x$		$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	нечет. период. $T = 2\pi$
$y = \cos x$		$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	четная период. $T = 2\pi$
$y = \operatorname{tg} x$		$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$(-\infty; +\infty)$	нечет. период. $T = \pi$
$y = \operatorname{ctg} x$		$(\pi n; \pi + \pi n)$	$(-\infty; +\infty)$	нечет. период. $T = \pi$

Функция	График функции	Область определения	Область изменения	Другие свойства
$y = \arcsin x$		$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	нечет.
$y = \arccos x$		$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	
$y = \arctan x$		$(-\infty; +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	нечет.
$y = \operatorname{arctg} x$		$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$	

СОДЕРЖАНИЕ.

1. Функция. Основные понятия	3
1.1. Функция одной переменной. Основные понятия	3
1.2. Построение графиков функций	13
2. Предел числовой последовательности.	
Предел функции. Непрерывность функции	21
2.1. Числовая последовательность и ее предел	21
2.2. Монотонные и ограниченные последовательности	24
2.3. Предел последовательности	28
2.4. Правила предельного перехода	32
2.5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности	34
2.6. Условия существования предела последовательности. 2-й замечательный предел	39
2.7. Основные способы нахождения пределов последовательностей	43
2.8. Предел функции в точке	61
2.9. Теоремы о пределах	64
2.10. Предел функции в бесконечности	67
2.11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	69
2.12. Техника нахождения пределов	71
2.13. Сравнение бесконечно малых. Применение к нахождению пределов	84
2.14. Непрерывность функции	90
3. Производная и ее приложения	106

1.1.	Производная функции. Правила дифференцирования	106
1.1.1.	Понятие производной	106
1.1.2.	Таблица производных основных элементарных функций	108
1.1.3.	Правила дифференцирования	109
1.1.4.	Производная сложной функции	110
1.1.5.	Производная обратной функции и функций, заданных параметрически и неявно	115
1.2.	Геометрический и физический смысл производной	119
1.3.	Дифференциал	127
1.4.	Бесконечные и односторонние производные	132
1.5.	Производные и дифференциалы высших порядков	135
1.6.	Формула Тейлора	143
1.7.	Правило Лопитала	156
1.8.	Исследование функций и построение графиков	164
1.8.1.	Основные теоремы дифференциального исчисления	164
1.8.2.	Теоретические основы исследования функций и построения графиков	169
1.8.3.	Примеры на исследование функций и построения графиков	177
1.8.4.	Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке и открытом промежутке	191
2.	Функции нескольких переменных	193
2.1.	Область определения, линии и поверхности уровня	193
2.2.	Частные производные и дифференциал первого	

порядка	196
4.3. Производная сложной функции	200
4.4. Производная функции, заданной неявно	203
4.5. Производная по направлению и градиент скалярного поля	207
4.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	211
4.7. Экстремум функции нескольких переменных	213
4.8. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области	217
5. Варианты расчетно-графических работ	221
Графики элементарных функций (приложение 1)	221
Предел последовательности (приложение 2)	225
Предел функций (приложение 3)	246
Непрерывность функций (приложение 4)	262
Производная и дифференциал (приложение 5)	270
Правило Лопиталю (приложение 6)	288
Нахождение пределов по формуле Тейлора (приложение 8)	295
Исследование функций с помощью производной и построение графиков (приложение 8)	298
Исследование функций двух переменных (приложение 9)	301
Дополнительные варианты (приложение 10, 11, 12, 13)	313
Программа по математическому анализу за первый семестр (приложение 14)	344
Таблица основных элементарных функций (приложение 15)	346