

4

# 3063

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)»

Грудцев А.С., Осипов Н.Л., Рыбакова М.Р.

Методические рекомендации  
к выполнению лабораторных работ по курсу  
«Устойчивость механических систем»

Учебное пособие для студентов, обучающихся  
по специальности 150301.65 «Динамика и прочность машин»  
и направлению 151600.62 «Прикладная механика»

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА**  
**УНИВЕРСИТЕТ МАШИНОСТРОЕНИЯ**  
**УЧЕБНЫЙ ФОНД**

3063

Москва

2014

621.01:531.1

Разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом ВПО 2000г. для специальности 150301.65 «Динамика и прочность машин» и ФГОС ВПО 2009г. для направления 151600.62 «Прикладная механика»

**Рецензенты:**

Надеждин В.С. – к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов»  
Университета машиностроения

Пирожков В.А. – к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов»  
Университета машиностроения

Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по курсу «Устойчивость механических систем» / А.С. Груздев, Н.Л. Осипов, М.Р. Рыбакова – М.: Университет машиностроения, 2014. – 52с.

Сборник включает 5 лабораторных работ по курсу «Устойчивость механических систем» для выполнения студентами очной формы обучения специальности 150301.65 «Динамика и прочность машин» и бакалавров по направлению подготовки 150300.62 «Прикладная механика» Университета машиностроения.

© Груздев А.С., Осипов Н.Л., Рыбакова М.Р.

©Университет машиностроения, 2014.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Общие сведения к проведению лабораторных работ.....	4
1.1 Устройство стенда УСС-5ЛР- 12 .....	4
1.2 Работа на стенде.....	8
2. Описание лабораторных работ .....	13
2.1. Понятие об устойчивости равновесия упругих систем .....	13
2.2. Способы определения критической нагрузки. ....	17
2.3. Устойчивость сжатого стержня в пределах упругости. Задача Эйлера. ....	20
2.4. Влияние способа закрепления стержня на величину критической силы. ....	27
2.5. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского .....	30
2.6. Экспериментальное определение критической силы. ....	36
2.7. Лабораторная работа №1. Определение зависимости критической силы и формы потери устойчивости от условий закрепления концов стержня.....	38
2.8. Лабораторная работа №2. Определение зависимости критической силы от формы поперечного сечения стержня. ....	41
2.9. Лабораторная работа №3. Определение зависимости критической силы от длины стержня. ....	44
2.10. Лабораторная работа №4. Определение зависимости критической силы от модуля упругости материала стержня. ....	47
2.11. Лабораторная работа №5. Определение зависимости сила - перемещение при докритическом и закритическом нагружении. ....	50
Список использованной литературы.....	52

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторные работы проводятся в соответствии с данными методическими материалами. К выполнению лабораторных работ допускаются только обучающиеся, ознакомившиеся с указанным материалом.

## 1.1. Устройство стенда УСС-5ЛР-12.

Лабораторные работы проводятся на стенде УСС-5ЛР-12, конструкция которого представлена на рисунках 1.1 и 1.2. Сменные образцы для испытаний показаны на рисунке 1.3.

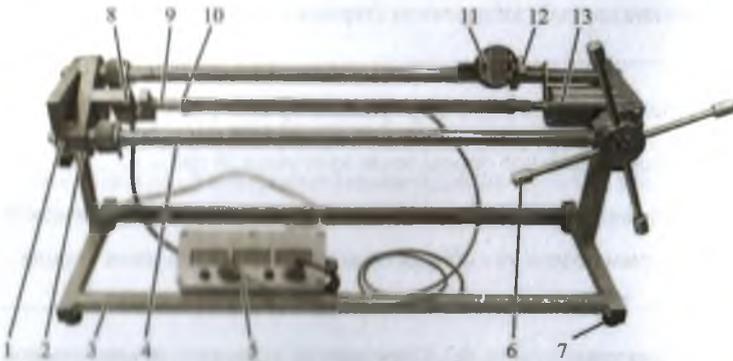


Рисунок 1.1. Общий вид.

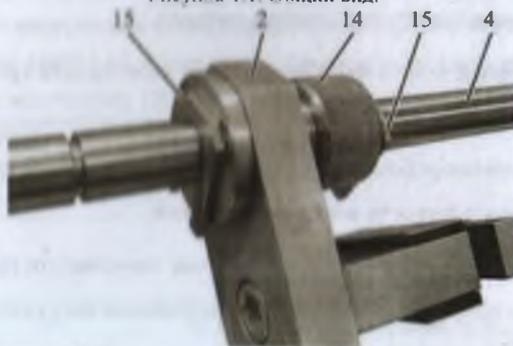


Рисунок 1.2. Вид на устройство регулировки рабочей длины.



Рисунок 1.3. Сменные образцы для испытаний

Стенд УСС-5ЛР-12 включает в себя (рисунки 1.1 и 1.2):

- опорные плиты 1;
- подвижную плиту 2, для регулировки длины рабочей зоны;
- рамку 3 для установки стенда на ровной поверхности (столе);
- силовые направляющие 4, с канавками под установку стопорных вилок;
- измерительный блок 5 для индикации показаний тензорезисторов и силоизмерителя;
- ручной привод 6 устройства нагружения;
- регулируемые опоры 7;
- силоизмеритель 8 с максимальным усилием 5 кН;
- опоры 9 со сферической лункой для установки образца;
- образцы 10:
  - образец 10.1 из алюминиевого сплава (зеленое покрытие), диаметр  $d=6$  мм, длина по крайним точкам опорных шариков

L=500 мм;

- образец 10.2 из стали, d=6 мм, L=500 мм;
- образец 10.3 из стали, d=5 мм, L=300 мм;
- образец 10.4 из стали, d=5 мм, L=400 мм;
- образец 10.5 из стали, d=5 мм, L=500 мм;
- образец 10.6 из двух уголков 10x10x1,1 мм из алюминиевого сплава;
- образец 10.7 из двух уголков 10x6x1,1 мм из алюминиевого сплава;
- цифровой микрометрический индикатор 11;
- кронштейн крепления 12 микрометрического индикатора 11;
- устройство нагружения 13;
- упорные гайки 14 для фиксации подвижной плиты;
- стопорные вилки 15 для фиксации подвижной плиты на силовых направляющих 4;
- две ограничивающих втулки для имитации граничных условий в виде заделки (только для образца 10.5).

Для индикации показаний силоизмерителя и тензодатчиков предназначен измерительный блок, показанный на рисунке 1.4. Измерительный блок показывает действующее значение усилия в кН, значение деформаций в тысячных процента, т.е. одна единица соответствует деформации  $10^{-3}$ .

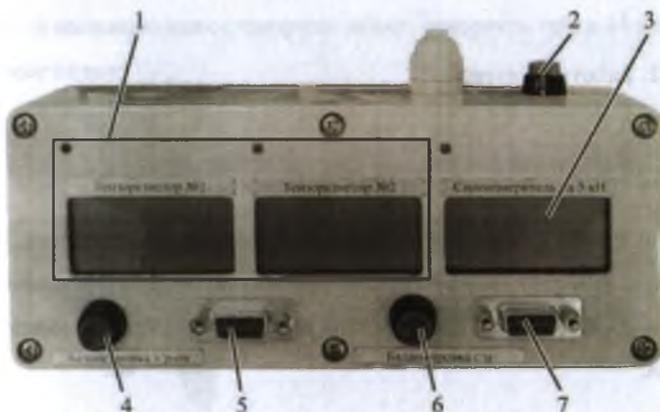


Рисунок 1.4. Измерительный блок

На измерительном блоке расположены:

- два цифровых табло 1 для индикации показаний тензорезисторов, свечение зеленого светодиода слева вверху от табло означает знак «минус»;
- кнопка 2 включения электропитания измерительного блока;
- цифровое табло 3 для индикации показаний силоизмерителя, свечение зеленого светодиода слева от табло означает знак «минус»;
- кнопка 4 для балансировки показаний тензорезисторов;
- разъем 5 для подключения тензорезисторов;
- кнопка 6 для балансировки показаний силоизмерителя;
- разъем 7 для подключения силоизмерителя.

## 1.2. Работа на стенде.

1) Установить образец в соответствии с лабораторной работой.

Для этого *в случае шарнирного опирания* образцов:

- полностью задвинуть опору нагружающего устройства, вращая приводную рукоятку устройства нагружения против хода часовой стрелки пока край винта, проходящего через рукоятку, не перестанет выступать из рукоятки;

- завернуть «от руки» упорные гайки 14 (рисунок 1.2), установить подвижную плиту в требуемое положение (рисунок 1.5 и 1.6), вставить в канавки на направляющих стопорные вилки, отвернуть гайки 14 до упора в стопорные вилки;

- завести одну из опор образца в лункообразное углубление на опоре (рисунок 1.7, показано стрелкой), вторую опору образца расположить напротив соответствующей лунки на опоре нагружателя;

- плавно вращая приводную рукоятку устройства нагружения по направлению хода часовой стрелки, подвести подвижную опору так, чтобы образец держался в лунках, но не был нагружен.

*В случае опирания образцов с заделкой* на одном или обоих концах действия следующие:

- полностью задвинуть опору нагружающего устройства, вращая приводную рукоятку устройства нагружения против хода часовой стрелки пока край винта, проходящего через рукоятку, не перестанет выступать из рукоятки;

- завернуть «от руки» упорные гайки 14 (рисунок 1.2), установить подвижную плиту в требуемое положение (рисунок 1.5 и 1.6), вставить в

канавки на направляющих стопорные вилки, отвернуть гайки 14 до упора в стопорные вилки;

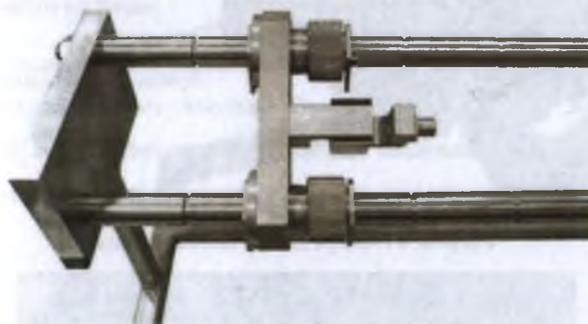


Рисунок 1.5. Установка подвижной плиты для длины рабочей зоны 400 мм



Рисунок 1.6. Установка подвижной плиты для длины рабочей зоны 300 мм



Рисунок 1.7. Опора для установки образца

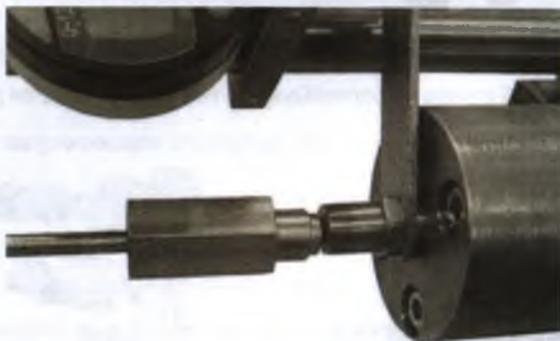


Рисунок 1.8. Установка ограничивающей втулки.

- одеть на выбранную опору (или на обе) образца ограничивающую втулку, входящую в состав станда, рисунок 1.8;

- плавно вращая приводную рукоятку устройства нагружения по направлению хода часовой стрелки подвести подвижную опору так, чтобы образец держался в лунках, но не был нагружен;

- сдвинуть ограничивающую втулку так, чтобы она охватывала опору образца и опору для установки образца, рисунок 1.9.

2) Подключить тензодатчики на используемом образце к соответствующему разъему на измерительном блоке.

3) Включить питание измерительного блока кнопкой, расположенной на боковой стороне блока. При этом должны включиться цифровые табло на блоке.

4) Сбалансировать показания тензорезисторов и силоизмерителя, нажав соответствующие кнопки. Выждать 5-10 минут для выхода электронных компонент на стационарный тепловой режим и повторно нажать кнопки балансировки.



Рисунок 1.9. Фиксация опор образца ограничивающими втулками

5) Включить измеритель перемещения траверсы, нажав кнопку «ON», установить начало отсчета нажав кнопку «ZERO».

6) Плавно вращая приводную рукоятку нагружающего устройства против направления хода часовой стрелки, произвести нагружение образца, периодически записывая показания тензорезисторов, силоизмерителя и измерителя перемещения.

**ВАЖНО!!!** В ходе нагружения необходимо отслеживать значения деформаций в образце. Обновление показаний цифровых табло происходит один раз в 2-3 с. При достижении значений деформаций по тензорезисторам величины  $50 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «50») для

образов из алюминиевого сплава и величины  $80 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «80») для образцов из стали **запрещается** производить дальнейшее нагружение, поскольку это может вызвать возникновение пластических деформаций в образце.

7) Произвести разгрузку образца, вращая приводную рукоятку нагружающего устройства по направлению хода часовой стрелки.

8) Выключить измеритель перемещения подвижной опоры, нажав кнопку «ON/OFF».

## 2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

### 2.1. Понятие об устойчивости равновесия упругих систем.

Под *устойчивостью* понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, она называется неустойчивой [1]. Также можно сказать, что неустойчивым является ее состояние.

В реальных условиях всегда существуют определенные причины, по которым может произойти отклонение от исходного равновесного состояния. Следовательно, возможность перехода к новому состоянию в неустойчивой системе всегда реализуется. В этом случае говорят, что произошла *потеря устойчивости*.

Явление потери устойчивости присуще не только сжатым стержням, но также тонким пластинам, оболочкам и вообще различным тонкостенным конструкциям из стержней, пластин и оболочек, широко применяемым в современной технике, и в частности в летательных аппаратах.

Потеря устойчивости приводит к разрушению конструкций. Поэтому определение величины критической нагрузки представляет собой практически важную задачу при проектировании. Актуальность ее особенно значительна для конструкций летательных аппаратов, где постоянно приходится стремиться к максимально возможному снижению веса, к созданию легких оптимальных форм конструкций с учетом прочности, жесткости, устойчивости.

Рассматривая прочность элементов конструкций и их деформации исходят из предположения, что всякое деформированное состояние тела есть состояние равновесия между внешними и внутренними силами. Это

равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Положение равновесия упругой системы считается устойчивым, если при всяком малом возможном отклонении её от этого положения система, будучи предоставленной самой себе возвращается в первоначальное состояние. Положение равновесия называется неустойчивым, если хотя бы при одном малом возможном отклонении системы от этого положения последняя, будучи предоставлена самой себе, не возвращается в первоначальное состояние, а получает неопределенно большие отклонения от него или переходит в некоторое новое положение равновесия, отличное от первоначального. Положение равновесия упругой системы называется безразличным, если при любых малых возможных отклонениях системы от этого положения система не имеет стремления ни увеличить своего отклонения, ни уменьшить его.

В механике твердого тела устойчивое и неустойчивое равновесие часто иллюстрируется на примере тяжелого шарика, лежащего на вогнутой и выпуклой поверхности (рис. 2.1). Если шарик лежит в нижней точке поверхности выпуклостью, направленной вниз (на дне, рис. 2.1, а), то положение равновесия является устойчивым. Если, наоборот, шарик лежит в верхней части поверхности выпуклостью, направленной вверх (рис. 2.1, б), то его положение равновесия является неустойчивым. Если шарик находится на горизонтальной плоскости (рис. 2.1, в), то это положение равновесия будет безразличным. Критерием устойчивости равновесия в данном случае является величина потенциальной энергии шарика. В указанных трех случаях потенциальная энергия шарика принимала стационарные значения, что соответствовало положению равновесия. Однако в первом случае ее значение минимально, во втором - максимально, в третьем - сохраняет постоянную величину. Таким образом, устойчивому состоянию равновесия отвечает такое положение шарика на поверхности, при котором потенциальная энергия принимает минимальное

значение.

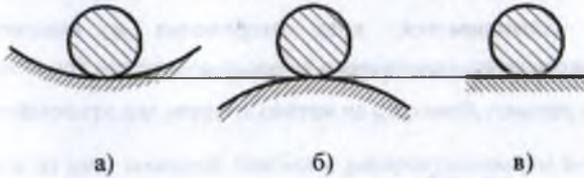


Рис. 2.1.

Если система имеет несколько степеней свободы, то положение равновесия в отношении одних возможных перемещений может быть устойчивым, а в отношении других - неустойчивым или безразличным.

Подобно шарикю, помещенному на гладкую поверхность, ведут себя и более сложные упругие системы, например, сжатый прямолинейный стержень (рис. 2.2, а). При малом значении продольной сжимающей нагрузки стержень остается прямолинейным, и это положение равновесия является устойчивым. При достижении нагрузкой определенного критического значения стержень искривляется, что связано с потерей устойчивости его первоначальной прямолинейной формы равновесия.

Для определения величины критической нагрузки достаточно разыскать ту нагрузку, при которой система теряет стремление вернуться в исходное положение равновесия независимо от величины возможного смещения. При этом можно ограничиться рассмотрением малых отклонений от положения равновесия. О том, как ведет себя упругая система после потери устойчивости, можно судить лишь с позиции больших конечных перемещений, которые имеет система в закритическом состоянии.

Еще одним примером потери устойчивости может быть тонкостенная труба, нагруженная внешним давлением (рисунок 2.2.б), при этом круговая форма сечения переходит в эллиптическую, а затем труба полностью сплющивается, хотя напряжения к моменту потери устойчивости не достигают предела текучести.

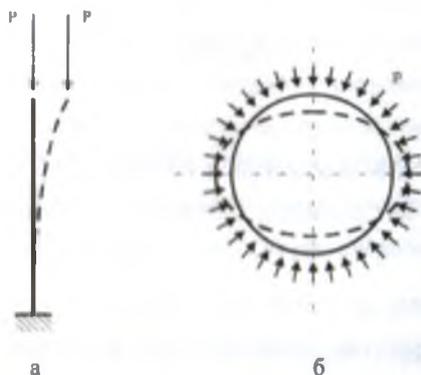


Рисунок 2.2. Потеря устойчивости при нагружении конструкций.

Опасность потери устойчивости состоит в том, что она наступает внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность элемента еще не исчерпана.

По указанным причинам для надежной работы конструкции мало, чтобы она была прочна, необходимо чтобы все ее элементы были устойчивы [2]. Поэтому в ряде случаев помимо проверки на прочность, необходима проверка на устойчивость.

## 2.2. Способы определения критической нагрузки.

Существуют различные способы определения критической нагрузки потери устойчивости для упругих систем из стержней, пластин и оболочек.

Одним из них, пожалуй, наиболее распространенным и возникшим еще в середине XVIII в., является метод Эйлера, суть которого заключается в следующем. Для новой формы равновесия упругой системы, отличной от первоначальной, составляется дифференциальное уравнение равновесия в предположении малых перемещений. Для сжатого прямолинейного стержня, например, таким уравнением является уравнение изгиба для изгибной формы равновесия стержня. Затем в результате непосредственного решения этого уравнения и последующего удовлетворения граничных условий находится то значение нагрузки, при котором возможно существование новой формы равновесия одновременно с первоначальной (прямолинейной). Последнее и будет критическим значением нагрузки потери устойчивости. Соответствующая ей форма отвечает безразличному состоянию равновесия, поскольку она определяется с точностью до амплитуды. Однако, если допустить дальнейшее увеличение нагрузки, то таким значениям будем соответствовать уже область неустойчивого равновесия.

Вторым способом определения критической нагрузки потери устойчивости является энергетический. В этом случае критическая нагрузка находится из условия минимума полной энергии системы для формы равновесия, возникающей при потере устойчивости упругой системы. Энергетический метод определения критической нагрузки позволяет относительно просто находить в общем случае приближенное значение этой нагрузки практически для любой задачи. Он особенно

полезен тогда, когда точное определение критической нагрузки методом Эйлера затруднительно вследствие сложности, а зачастую невозможности нахождения решения соответствующего дифференциального уравнения устойчивости. Такая ситуация, например, возникает при определении критической нагрузки для сжатого стержня переменного сечения или для стержня, нагруженного сложной системой сжимающих нагрузок, а также в задачах устойчивости пластин и оболочек, для которых определение критических нагрузок сводится к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных от двух независимых переменных. Энергетический метод определения критической нагрузки, следовательно, носит более общий характер, чем метод Эйлера.

Остановимся еще на динамическом методе определения критической нагрузки, также широко применяемом в настоящее время. Суть его в следующем. Для новой формы равновесия стержня составляются динамические уравнения движения и определяются частоты колебания системы в отклоненном состоянии. При малых значениях нагрузки колебания системы являются гармоническими и движение носит устойчивый характер. С увеличением нагрузки частота колебания системы будет изменяться. Критическая нагрузка потери устойчивости находится из условия перехода системы к апериодическому движению, т.е. к движению с нарастающей амплитудой.

Динамический метод позволяет найти критическую нагрузку также и тогда, когда нагрузка, приложенная к стержню, является следящей. Под такой нагрузкой понимается внешняя сжимающая сила, приложенная к концу стержня, которая при искривлении стержня непрерывно изменяет свое направление, все время оставаясь направленной по оси стержня. Определение критического значения для следящей нагрузки ранее указанными способами (методом Эйлера или энергетическим методом),

основанными на статическом равновесии системы в момент потери устойчивости, оказалось невозможным. С позиций этих критериев стержень, нагруженный на конце сжимающей следящей силой, не теряет устойчивости ни при каком значении силы. Рассмотрение же задачи устойчивости стержня, нагруженного сжимающей следящей силой, с позиции динамического критерия, приводит к вполне определенному значению критической нагрузки.

Для обычных сжимающих нагрузок, направление которых не изменяется с изгибом стержня, все три указанных критерия определения критической нагрузки дают одинаковый результат.

Рассмотрим достаточно длинный по сравнению с его поперечными размерами стержень, шарнирно-прикрепленный к опорам (рисунок 2.3) и нагрузим его сверху центрально силой  $P$  постепенно возрастающей. Пока сила  $P$  сравнительно мала, стержень будет сохранять прямолинейную форму. При отклонении стержня в сторону, он будет после ряда колебаний возвращаться к первоначальной форме, как только будет удалена сила, вызвавшая отклонение. При постепенном увеличении силы  $P$  стержень будет все медленнее возвращаться к первоначальному положению при проверках его устойчивости. Силу  $P$  можно довести до такой величины, при которой стержень после небольшого отклонения в сторону уже не выпрямится, а останется искривленным. Если не удаляя силы  $P$ , выпрямить стержень, то он уже не сможет сохранить прямолинейную форму. При этом значении силы  $P$ , называемом *критическим*,  $P_k$ , прямолинейная форма перестает быть устойчивой формой равновесия сжатого стержня. Критическая сила  $P_k$  вызывает в сжатом стержне напряжение, называемое “критическим напряжением”  $\sigma_k = P_k/A$ . Критические напряжения являются опасными напряжениями для сжатого стержня. Поэтому чтобы обеспечить устойчивость прямолинейной формы

стержня к условию прочности добавляют условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma_y],$$

где  $[\sigma_y]$  - допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому, деленному на коэффициент запаса на устойчивость:

$$[\sigma_y] = \sigma_k / n.$$

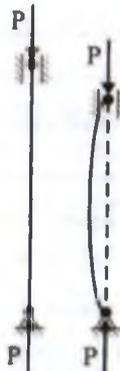


Рисунок 2.3. Устойчивость продольно сжатого стержня.

Для нахождения критических напряжений  $\sigma_k$  необходимо вычислить критическую силу  $P_k$ , т.е. наименьшую осевую сжимающую силу, способную удержать в равновесии слегка искривленный сжатый стержень. Впервые эта задача была поставлена и решена Л. Эйлером.

### 2.3. Устойчивость сжатого стержня в пределах упругости. Задача Эйлера.

Рассмотрим прямолинейный стержень, находящийся под действием сжимающей силы  $P$  (см. рис. 2.4). При малых значениях силы стержень сохраняет первоначальную прямолинейную форму равновесия. При достижении силой  $P$  некоторого определенного значения, называемого критическим, происходит выпучивание стержня вследствие его изгиба. Выпучивание означает потерю устойчивости стержня. Явление потери устойчивости нами связывается с тем обстоятельством, что при критическом значении нагрузки первоначальная прямолинейная форма равновесия сжатого стержня оказывается неустойчивой. Одновременно с ней в этот момент появляется новая изгибная форма равновесия, что и говорит о неустойчивости первоначальной прямолинейной формы. Эта вторая форма равновесия, возникающая при критическом значении продольной нагрузки, получает преобладающее значение. Последнее и приводит к разрушению стержня вследствие потери устойчивости.



Рис. 2.4.

Выведем дифференциальное уравнение устойчивости сжатого стержня в предположении малых перемещений, т.е. в случае линейной постановки задачи. Будем для определенности считать, что стержень по концу  $x=0$  зашкелен, а по концу  $x=l$  свободен от закрепления (рис. 2.5).

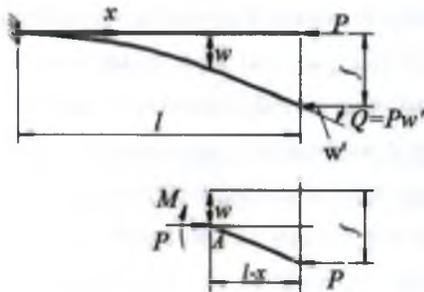


Рис. 2.5.

Обозначим через  $w(x)$  прогиб стержня при потере устойчивости. Максимальное его значение на конце стержня  $x=l$  примем равным  $f$ . Все последующие рассуждения будем относить к этой новой форме равновесия, определяемой функций прогиба  $w(x)$ .

Рассмотрим условие равновесия отсеченной части стержня длиной  $(l-x)$  в смысле моментов относительно точки А (рис. 2.5). Будем иметь

$$M + M^* = 0, \quad (2.1)$$

Здесь внешний момент  $M$  от продольной силы  $P$  принимает значение

$$M^* = P(f - w) \quad (2.2)$$

Момент  $M$  от внутренних сил стержня возникает вследствие изгиба оси стержня. Он связан с кривизной оси стержня

$$\chi = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.3)$$

посредством соотношения

$$M = -EJ\chi. \quad (2.4)$$

Отметим, что в соответствии с принятой системой знаков момент  $M$ , отвечающий растяжению нижних волокон стержня (см. рис. 2.5), считается положительным. Такому направлению момента отвечает отрицательное значение кривизны (2.3). Вследствие указанного обстоятельства в формуле (2.4) поставлен знак «минус».

Принимая во внимание зависимости (2.1) - (2.4), получаем искомое дифференциальное уравнение устойчивости стержня второго порядка:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 f. \quad (2.5)$$

Здесь  $\frac{P}{EJ}$  больше нуля и потому принято обозначение:

$$k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) является неоднородным. Общее его решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$w'' + k^2 w = 0 \quad (2.7)$$

и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения разыскиваем в виде

$$w = e^{Sx} \quad (2.8)$$

Из характеристического уравнения

$$S^2 + k^2 = 0$$

находим характеристические числа:

$$S = \pm ik.$$

Последние принимают мнимые значения. При этом общее решение неоднородного уравнения (2.5) будет следующим:

$$w = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + f, \quad (2.9)$$

здесь  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные интегрирования;

$f$  - частное решение неоднородного уравнения (2.5).

Рассмотрим определение критической нагрузки и соответствующую форму потери устойчивости для сжатого стержня, опёртого по концам (рис. 2.4).

В данном случае прогиб на конце стержня  $x=l$  отсутствует,  $f=0$ , и

решение (2.9) примет вид

$$w = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (2.10)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  следует найти из условий отсутствия прогиба по концам стержня:

$$w = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (2.11)$$

Удовлетворяя последним, получаем

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin kl = 0. \quad (2.12)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не могут одновременно обратиться в нуль, так как в этом случае  $w = 0$ , что приводит к первоначальной прямолинейной форме равновесия. Следовательно, коэффициент при  $C_1$  в (2.12) должен обратиться в нуль:

$$\sin kl = 0$$

Последнее условие будет выполнено, если

$$kl = n\pi, \quad (2.13)$$

где  $n$  - целое число.

С учетом (2.6) находим соответствующие значения сил  $P$ :

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.14)$$

Каждому из найденных значений критической силы соответствует определенная форма равновесия стержня. Подставляя найденное значение  $k$  в уравнение изогнутой оси бруса, замечаем, что при первой критической силе стержень изгибается по одной полуволне синусоиды, а при прочих значениях число полуволн равно множителю при числе  $\pi$  (рис. 2.6)

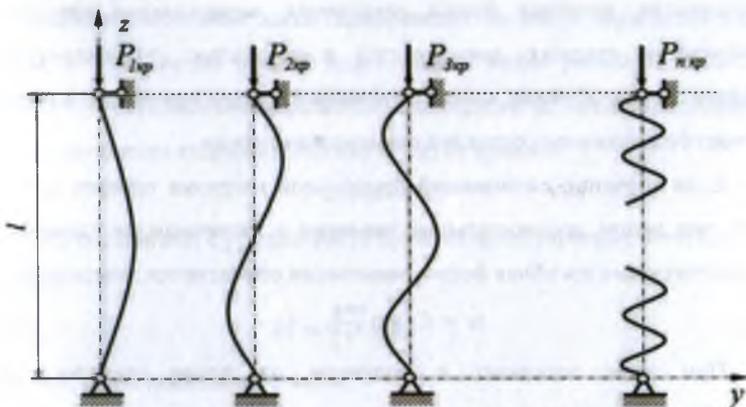


Рис. 2.6.

Форма равновесия стержня, соответствующая первой критической силе, является устойчивой, а все остальные формы равновесия — неустойчивыми. Для инженерных расчетов на устойчивость представляет интерес только минимальное значение сжимающей силы, при которой наблюдается изгиб оси стержня. Наименьшее значение силы получится при  $n=1$ :

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.15)$$

Оно и отвечает искомой критической нагрузке для сжатого стержня, опертого по концам. Эта сила называется первой критической или эйлеровой силой.

Форма прогиба, соответствующая критической нагрузке, найдется из соотношения (2.10). Принимая во внимание зависимость (2.13), при  $n=1$  и  $C_2 = 0$  получаем

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.16)$$

Постоянная  $C_1$  здесь остается произвольной. В данном случае, соответствующем приближенной линейной постановке задачи

устойчивости, изгибная форма равновесия, возникающая при потере устойчивости стержня, определяется с точностью до амплитудного значения. Таким образом, в рамках линейной теории критической нагрузке отвечает безразличное состояние равновесия стержня.

Если значение сжимающей продольной нагрузки принять согласно (2.14) при целом положительном значении  $n$ , отличном от единицы, то соответствующая изгибная форма равновесия определится зависимостью

$$w = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.17)$$

При этом возникает  $n$  полувольт на длине стержня. Такое волнообразование возможно лишь в случае закрепления сжатого стержня от прогиба именно в тех точках, где обращается в нуль функция

$$\sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Если при указанной нагрузке связи убрать, то стержень разрушится, причем форма потери устойчивости (2.17) перейдет в форму с одной полувольтной, которой соответствует наименьшая критическая нагрузка (2.15).

Рассмотрим другой пример. Найдем критическую нагрузку и соответствующую форму потери устойчивости для сжатого стержня, защемленного по концу  $x=0$  и свободного от закрепления по концу  $x=l$  (см. рис. 2.5).

В данном случае для определения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и  $f$  в общей зависимости (2.9) воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{cases} w = w' = 0 & \text{при } x = 0 \\ w = f & \text{при } x = l. \end{cases} \quad (2.18)$$

Удовлетворяя последним с помощью решения (2.9), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических соотношений относительно трех указанных постоянных:

$$\begin{cases} C_2 + f = 0; & kC_1 = 0; \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Все три постоянные здесь одновременно не могут обратиться в нуль, так как в этом случае прогиб будет тождественно равняться нулю, что соответствует тривиальному решению для первоначальной прямолинейной формы равновесия стержня. Поэтому следует принять

$$\cos kl = 0.$$

При этом постоянная  $C_2$  будет иметь произвольное значение. Отсюда получим

$$kl = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (2.20)$$

где  $n$  - целое положительное число.

При этом из соотношения (2.6) найдем

$$P = \frac{EJ}{l^2} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2.$$

Наименьшее значение сжимающей силы  $P$  получится при  $n=0$ . Таким образом,

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,46 \frac{EJ}{l^2}. \quad (2.21)$$

Из соотношений (2.19) получим значения постоянных:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -f.$$

Принимая во внимание зависимость (2.20), где следует положить  $n=0$ , на основании (2.9) определим изгибную форму потери устойчивости для сжатого стержня с одним защемленным концом:

$$w = f \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2l} x \right). \quad (2.22)$$

Коэффициент  $f$  здесь остается неопределенным, что в линейной постановке задачи соответствует безразличному состоянию равновесия стержня при потере устойчивости.

**2.4. Влияние способа закрепления стержня на величину критической силы.**

Рассмотрим потерю устойчивости центрально сжатого линейно упругого стержня длиной  $l$ , на одном конце которого имеется защемление, а другой его конец остается свободным. Деформированное состояние стержня показано на рис. 2.7. Дополним деформированное состояние до полуволны синусоиды путем зеркального отражения стержня в отрицательную область по оси  $z$ . В этом случае деформированное состояние соответствует потере устойчивости шарнирно закрепленного стержня, имеющего длину  $2l$ . Тогда, подставляя длину  $2l$  в формулу Эйлера, получаем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть потерю устойчивости сжатых стержней и при других способах закрепления концов (рис. 2.7). Величину критической силы можно записать в общем виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(l_0)^2} \quad (2.23)$$

где  $\mu$  - коэффициент приведения длины;

$l_0 = \mu l$  - приведенная длина.

Коэффициент приведенной длины  $\mu$  показывает, сколько раз укладывается длина заданного стержня в длине шарнирно опертого стержня, имеющего такую же критическую силу, как и заданный стержень.

Значения коэффициента приведения длины для различных условий опирания приведены на рисунке 2.7.

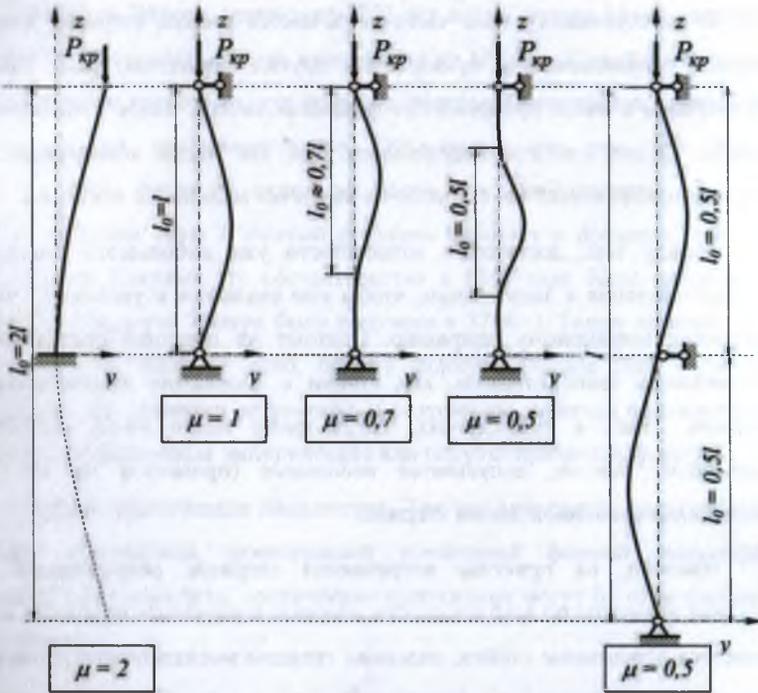


Рисунок 2.7. Коэффициент приведения длины.

Понятие о приведенной длине было впервые введено профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским.

На практике, однако, почти никогда не встречаются в чистом виде те закрепления концов стержня, которые мы имеем на наших расчетных схемах.

Вместо шаровых опор обычно применяются цилиндрические шарниры. Подобные стержни следует считать шарнирно-опертыми при выпучивании их в плоскости, перпендикулярной к оси шарниров; при искривлении же в плоскости этих осей концы стержней следует считать защемленными (с учетом оговорок, приведенных ниже для защемленных концов).

В конструкциях очень часто встречаются сжатые стержни, концы которых приклепаны или приварены к другим элементам, часто еще с добавлением в месте прикрепления фасонных листов. Такое закрепление, однако, трудно считать защемлением, так как части конструкции, к которым прикреплены эти стержни, не являются абсолютно жесткими.

Между тем, достаточно возможности уже небольшого поворота опорного сечения в защемлении, чтобы оно оказалось в условиях, очень близких к шарнирному опиранию. Поэтому на практике недопустимо рассчитывать такие стержни, как стойки с абсолютно защемленными концами. Лишь в тех случаях, когда имеет место очень надежное защемление концов, допускается небольшое (процентов на 10—20) уменьшение свободной длины стержня.

Наконец, на практике встречаются стержни, опирающиеся на соседние элементы по всей плоскости опорных поперечных сечений. Сюда относятся деревянные стойки, отдельно стоящие металлические колонны, притянутые болтами к фундаменту, и т. д. При тщательном конструировании опорного башмака и соединения его с фундаментом можно считать эти стержни имеющими защемленный конец. Сюда же относятся мощные колонны с цилиндрическим шарниром при расчете их на выпучивание в плоскости оси шарнира. Обычно же трудно рассчитывать на надежное и равномерное прилегание плоского концевого сечения сжатого стержня к опоре. Поэтому грузоподъемность таких стоек обычно мало превышает грузоподъемность стержней с шарнирно-опертыми концами.

## **2.5. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского**

Формула Эйлера, полученная 250 лет назад, долгое время являлась предметом дискуссий. Споры длились около 100 лет. Одной из главных причин споров явилось то, что формула Эйлера для некоторых случаев не подтверждалась экспериментально. Объясняется это тем, что Эйлер выводил свою формулу, используя закон Гука, предполагая, что при любом значении силы  $P$  сжатый стержень работает в пределах упругих деформаций. Впервые это обстоятельство в 1845 году было разъяснено Лимарлем (формула Эйлера была получена в 1744г.). Таким образом, столетиям практика было не ясно, почему формула Эйлера дает часто не пригодные для практики результаты, и поэтому ею избегали пользоваться, предпочитая различные эмпирические или полуэмпирические формулы.

Найдем критические напряжения. Так как при силах, меньших или равных критической, единственной устойчивой формой равновесия является прямолинейная, критические напряжения могут быть вычислены по формуле:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} \leq \sigma_{мн}.$$

(2.24)

Из формулы (2.24) становится ясно, что если прямолинейная форма стержня останется устойчивой и при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, то приближенное дифференциальное уравнение упругой линии стержня, предполагающее справедливость закона Гука, уже не будет пригодно для описания изгиба при потере устойчивости.

Выразим критические напряжения в стержне, подставив значение критической силы (2.23):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{A(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i}\right)^2}, \quad (2.25)$$

где  $i = i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$  – наименьший из главных радиусов инерции стержня;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Введем безразмерную величину

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}, \quad (2.26)$$

называемую *гибкостью стержня*.

Перепишем выражения для критических напряжений (2.25) в виде:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (2.27)$$

Эта формула является также формулой Эйлера, но в видоизмененном виде. В соответствии с этой формулой критические напряжения сжатого стержня зависят от упругих характеристик материала (модуля упругости  $E$ ) и от гибкости стержня  $\lambda$ .

Предельная величина критических напряжений, которые можно определить по формуле Эйлера (2.27), ограничены сверху пределом пропорциональности для материала стержня. Приравнивая величину критических напряжений величине предела пропорциональности, из уравнения (2.27) найдем предельную гибкость, при которой применима формула Эйлера:

$$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пл}}}}. \quad (2.28)$$

Если  $\lambda > \lambda_{\text{пр}}$ , формулу Эйлера применять можно, если  $\lambda < \lambda_{\text{пр}}$  формулу Эйлера применять нельзя. Стержни, у которых гибкость больше предельной ( $\lambda > \lambda_{\text{пр}}$ ) называют стержнями *большой гибкости*. Для малоуглеродистой стали, у которой  $\sigma_{\text{пл}} = 200$  МПа и модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, предельная гибкость равна:

$$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

То же самое можно получить и графически. На рис. 2.8 в системе координат  $(\sigma_{\text{кр}} - \lambda)$  построен график зависимости критических напряжений от гибкости стержня. Графически эта зависимость представляет собой гиперболу и называется *гиперболой Эйлера*. График построен для стали Ст.3 и показывает, что по мере возрастания гибкости стержня критические напряжения стремятся к нулю, и наоборот, по мере приближения гибкости к нулю критические напряжения стремятся к бесконечности.

Отложим на оси ординат  $(\sigma_{\text{кр}})$  величину предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пл}}$  и проведем из полученной точки D прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечется с гиперболой Эйлера в точке A, абсцисса которой и есть  $\lambda_{\text{пр}}$ . Слева от точки A гипербола Эйлера показана штриховой линией, так как на этом отрезке она дает значения критических напряжений, больших предела пропорциональности, что не соответствует условиям ее применимости. Если же применять формулу Эйлера за пределом пропорциональности (при  $\lambda < \lambda_{\text{пр}}$ ), эта формула дает завышенные значения критической силы. В результате происходит переоценивание действительной устойчивости стержня. Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределами упругости, не только принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям.



Рис.2.8. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня для стали Ст.3.

Для случая, когда стержень работает за пределами упругости, теоретические выводы сильно усложняются. В связи с этим обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого количества опытных данных. Для критических напряжений наибольшее распространение из них получило выражение:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (2.29)$$

Выражение (5) имеет название формула Ясинского-Тетмайера. При этом в отечественной литературе ее часто называют формулой Ясинского, а в зарубежных – формулой Тетмайера.

Для чугуна выражение (2.29) принимает вид

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + 0,052\lambda^2. \quad (2.29')$$

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  обычно приводят в справочниках по устойчивости. Однако с появлением новых материалов и изменением их номенклатуры такие справочники зачастую не удовлетворяют практические запросы.

Для некоторых видов материалов значения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  для приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Материал	$\lambda_0$	$\lambda_{пр}$	$a$ (МПа)	$b$ (МПа)
Сталь Ст2	62	105	264	0,7
Сталь Ст3	61	100	310	1,14
Сталь Ст4, 20	60	96	328	1,15
Сталь 25, Ст5, 30	60	90	464	3,26
Сталь 40	60	90	321	1,16
Сталь 45	52	85	449	1,67
Сталь 50	50	82	473	1,87
Кремнистая сталь	-	100	589	3,82
Хромомолибденовая сталь	28	55	1000	5,4
Дерево (сосна, ель)	-	70	29,3	0,194
Дюралюминий Д16Т	30	53	406	1,83
Чугун		80	761	11,8

Экспериментальные значения критических напряжений на рис. 2.8 на участке АВ условно показаны точками. Ф.С. Ясинский, получив данные эксперимента, аппроксимировал эти данные прямой линией АВ (на графике), уравнение которой записал в виде (2.29). Гибкость стержня, соответствующая точке В на графике, равна приблизительно 40-50. Назовем стержни, гибкость которых колеблется от 40 до  $\lambda_{пр}$ , стержнями *средней гибкости*.

При некотором значении гибкости  $\lambda_0$  величина критических напряжений  $\sigma_{кр}$ , вычисленная по формуле Ясинского (2.29), становится равной пределу текучести при сжатии для пластичных материалов  $\sigma_T$  или

пределу прочности при сжатии для хрупких материалов  $\sigma_B$ . Стержни, у которых  $\lambda < \lambda_0$ , называются стержнями *малой гибкости*. Такие стержни устойчивость не теряют и рассчитываются только на прочность.

На рис.2.8 стержням малой гибкости соответствует прямая ВС.

Таким образом, на графике (рис. 2.8), устанавливающим зависимость критических напряжений от гибкости стержня, можно выделить три группы стержней и соответствующие им зоны:

- I группа стержней ( $\lambda > \lambda_{кр}$ ) – стержни большой гибкости – критические напряжения для стержней этой группы определяются по формуле Эйлера (14.20);

- II группа стержней ( $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{кр}$ ) – стержни средней гибкости – критическое напряжение для этой группы стержней определяется по формуле Ясинского (14.22);

- III – стержни малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ) – критические напряжения не определяются. Такие стержни устойчивости не теряют, и их расчет производится только на прочность.

## 2.6. Экспериментальное определение критической силы.

При достижении внешней нагрузкой первой критической силы стержень в виду присутствия в его геометрии начальных несовершенств теряет устойчивость. В случае кинематического нагружения стержень переходит в новую форму равновесия - искривленную, при этом

напряжения и деформации в его среднем сечении резко возрастают в связи с возникновением изгибающего момента. Таким образом, потеря устойчивости по первой форме может быть легко зафиксирована двумя тензодатчиками, установленными вдоль оси стержня в его среднем сечении (рисунок 2.9). В случае, когда плоскость изгиба при потере устойчивости неизвестна, например, для круглого сечения образца, то датчики устанавливают в двух перпендикулярных плоскостях.

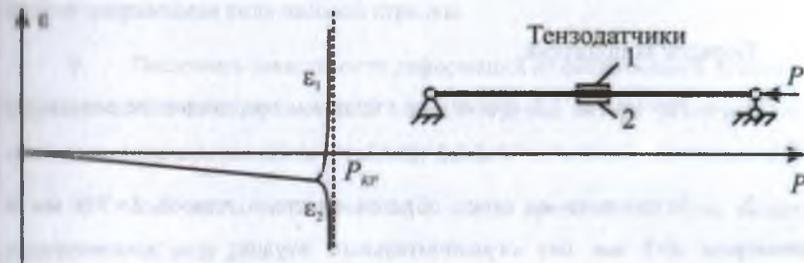


Рисунок 2.5. Зависимость деформаций от сжимающей силы

До момента достижения критического значения сжимающей силы, показания датчиков деформации (тензорезисторов) линейно зависят от величины сжимающей силы. При приближении к нагрузке потери устойчивости деформации в среднем сечении образца начинают резко возрастать, при малом увеличении значения силы. Таким путем определяется факт потери устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня.

Справочные величины:

Модуль упругости стали  $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Модуль упругости алюминиевого сплава  $E_{ал} = 0,7 \cdot 10^5$  МПа.

## 2.7. Лабораторная работа №1. Определение зависимости критической силы и формы потери устойчивости от условий закрепления концов стержня.

Цель работы: изучение влияния условий опирания стержня на величину критической силы и форму потери устойчивости при сжатии.

Порядок выполнения.

1. Изучить п. 1.2 «Работа на стенде» и теоретические основы по п.2.1.
2. Установить на стенд образец из стали длиной  $L=500$  мм и диаметром  $d=5$  мм без ограничительных втулок, что соответствует шарнирному опиранию стержня.
3. Подключить разъем тензорезисторов к соответствующему разъему на измерительном блоке.
4. Включить электропитание измерительного блока. Подождать 5-10 минут для выхода электронных компонент блока на тепловой режим.
5. Произвести балансировку силоизмерителя и тензорезистров нажатием соответствующих кнопок на измерительном блоке.
6. Плавно вращая рукоятку приводного устройства по направлению хода часовой стрелки, начать нагружение образца, контролируя при этом значение усилия и деформаций по цифровым табло. В процессе нагружения записывать текущие значения усилия ( $P$ ) и деформаций ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ) в таблицу 2.2.1 с шагом 5-6 единиц по деформациям. Нагружение проводить до значений деформаций 60-70.

**ВНИМАНИЕ!** Обновление показаний цифровых табло происходит один раз в 2-3 с. Запрещено превышать значение деформаций  $80 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «80») для образцов из стали.

7. Сделать эскиз формы потери устойчивости образца.
8. Разгрузить образец, вращая рукоятку приводного устройства против направления хода часовой стрелки.
9. Построить зависимости деформаций от сжимающего усилия. Определить значение критической силы (нагрузки потери устойчивости), внести полученное значение в таблицу 2.2.2.
10. Рассчитать теоретическое значение критической силы, занести результат в таблицу 2.2.2.
11. Установить на одну из опор образца ограничивающую втулку, что будет соответствовать опиранию с запретом поворота на одном конце образца и шарниром с другой.
12. Повторить действия по п.6-10.
13. Установить на обе опоры образца ограничивающие втулки, что будет соответствовать опиранию с запретом поворота с обоих концов образца.
14. Повторить действия по п.6-10.
15. Выключить питание измерительного блока.
16. Отключить разъем тензорезисторов от измерительного блока, снять образец.
17. Сравнить полученные экспериментальные и расчетные значения. Сделать выводы.



## 2.8. Лабораторная работа №2. Определение зависимости критической силы от формы поперечного сечения стержня.

Цель работы: изучение влияния формы поперечного сечения стержня на величину критической силы и форму потери устойчивости при сжатии.

### Порядок выполнения.

1. Изучить п. 1.2 «Работа на стенде» и теоретические основы по п.2.1.
2. Установить на стенд образец из алюминиевого сплава длиной  $L=500$  мм с поперечным сечением из двух уголков  $10 \times 10 \times 1,1$  мм.
3. Подключить разъем тензорезисторов к соответствующему разъему на измерительном блоке.
4. Включить электропитание измерительного блока. Подождать 5-10 минут для выхода электронных компонент блока на тепловой режим.
5. Произвести балансировку силоизмерителя и тензорезистров нажатием соответствующих кнопок на измерительном блоке.
6. Плавно вращая рукоятку приводного устройства по направлению хода часовой стрелки, начать нагружение образца, контролируя при этом значения усилия и деформаций по цифровым табло. В процессе нагружения записывать текущие значения усилия ( $P$ ) и деформаций ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ) в таблицу 2.3.1 с шагом 5-6 единиц по деформациям. Нагружение проводить до значения деформаций 40-50.

**ВНИМАНИЕ!** Обновление показаний цифровых табло происходит один раз в 2-3с. Запрещено превышать значение деформаций  $50 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «50») для образцов из

алюминиевого сплава, поскольку это может вызвать возникновение пластических деформаций в образце.

7. Сделать эскиз формы потери устойчивости образца.
8. Разгрузить образец, вращая рукоятку приводного устройства против направления хода часовой стрелки. Построить зависимости деформаций от сжимающего усилия. Определить значение критической силы (нагрузки потери устойчивости), занести полученное значение в таблицу 2.3.2.
9. Рассчитать теоретическое значение критической силы, занести результат в таблицу 2.3.2.
10. Выключить питание измерительного блока.
11. Отключить разъем тензорезисторов от измерительного блока, снять образец.
12. Установить на стенд образец из алюминиевого сплава длиной  $L=500$  мм с поперечным сечением из двух уголков  $10 \times 6 \times 1,1$  мм.
13. Повторить действия по п.3-12 для второго образца.
14. Сравнить полученные значения. Сделать выводы.

Таблица 2.2.1. Результаты измерений.

Сечение – два уголка $10 \times 10 \times 1,1$			Сечение – два уголка $10 \times 6 \times 1,1$		
$P$ , кН	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$	$P$ , кН	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$

Таблица 2.3.2. Результаты испытаний

Вид сечения	Экспериментально полученная нагрузка потери устойчивости, Н	Первая критическая сила по формуле Эйлера, Н
Два уголка 10x10x1,1, мм		
Два уголка 10x6x1,1, мм		

## 2.9. Лабораторная работа №3. Определение зависимости критической силы от длины стержня.

Цель работы: изучение влияния длины стержня на величину критической силы и форму потери устойчивости при сжатии.

### Порядок выполнения.

1. Изучить п. 1.2 «Работа на стенде» и теоретические основы по п.2.1.
2. Установить на стенд образец из стали длиной  $L=500$  мм и диаметром  $d=5$  мм без ограничительных втулок, что соответствует шарнирному опиранию стержня.
3. Подключить разъем тензорезисторов к соответствующему разъему на измерительном блоке.
4. Включить электропитание измерительного блока. Подождать 5-10 минут для выхода электронных компонент блока на тепловой режим.
5. Произвести балансировку силоизмерителя и тензорезисторов нажатием соответствующих кнопок на измерительном блоке.
6. Плавно вращая рукоятку приводного устройства по направлению хода часовой стрелки, начать нагружение образца, контролируя при этом значение усилия и деформаций по цифровым табло. В процессе нагружения записывать текущие значения усилия ( $P$ ) и деформаций ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ) в таблицу 2.4.1 с шагом 5-6 единиц по деформациям. Нагружение проводить до значения деформаций 60-70.

**ВНИМАНИЕ!** Обновление показаний цифровых табло происходит один раз в 2-3 с. Запрещено превышать значение

деформаций  $80 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «80») для образцов из стали, поскольку это может вызвать возникновение пластических деформаций в образце.

7. Сделать эскиз формы потери устойчивости образца.
8. Разгрузить образец, вращая рукоятку приводного устройства против направления хода часовой стрелки. Построить зависимости деформаций от сжимающего усилия. Определить значение критической силы (нагрузки потери устойчивости), занести полученное значение в таблицу 2.4.2.
9. Рассчитать теоретическое значение критической силы, занести результат в таблицу 2.4.2.
10. Выключить питание измерительного блока.
11. Отключить разъем тензорезисторов от измерительного блока, снять образец.
12. Установить на стенд образец из стали длиной  $L=400$  мм и диаметром  $d=5$  мм без ограничительных втулок, что соответствует шарнирному опиранию стержня.
13. Повторить действия по п.3-12 для второго образца.
14. Установить на стенд образец из стали длиной  $L=300$  мм и диаметром  $d=5$  мм без ограничительных втулок, что соответствует шарнирному опиранию стержня.
15. Повторить действия по п.3-12 для третьего образца.
16. Сравнить полученные значения. Сделать выводы.



## 2.10. Лабораторная работа №4. Определение зависимости критической силы от модуля упругости материала стержня.

Цель работы: изучение влияния модуля упругости материала стержня на величину критической силы и форму потери устойчивости при сжатии.

### Порядок выполнения.

1. Изучить п. 1.2 «Работа на стенде» и теоретические основы по п.2.1.
2. Установить на стенд образец из *алюминиевого* сплава длиной  $L=500$  мм и диаметром  $d=6$  мм.
3. Подключить разъем тензорезисторов к соответствующему разъему на измерительном блоке.
4. Включить электропитание измерительного блока. Подождать 5-10 минут для выхода электронных компонент блока на тепловой режим.
5. Произвести балансировку силоизмерителя и тензорезисторов нажатием соответствующих кнопок на измерительном блоке.
6. Плавно вращая рукоятку приводного устройства по направлению хода часовой стрелки, начать нагружение образца, контролируя при этом значения усилия и деформаций по цифровым табло. В процессе нагружения записывать текущие значения усилия ( $P$ ) и деформаций ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ) в таблицу 2.5.1 с шагом 5-6 единиц по деформациям. Нагружение проводить до значения деформаций 40-50.

**ВНИМАНИЕ!** Обновление показаний цифровых табло происходит один раз в 2-3 с. Запрещено превышать значение

деформаций  $80 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «80») для образцов из стали и значение деформаций  $50 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «50») для образцов из алюминиевого сплава, поскольку это может вызвать возникновение пластических деформаций в образце.

7. Сделать эскиз формы потери устойчивости образца.
8. Разгрузить образец, вращая рукоятку приводного устройства против направления хода часовой стрелки. Построить зависимости деформаций от сжимающего усилия. Определить значение критической силы (нагрузки потери устойчивости), занести полученное значение в таблицу 2.5.2.
9. Рассчитать теоретическое значение критической силы, занести результат в таблицу 2.5.2.
10. Выключить питание измерительного блока.
11. Отключить разъем тензорезисторов от измерительного блока, снять образец.
12. Установить на стенд образец из *стали* длиной  $L=500$  мм и диаметром  $d=6$  мм.
13. Повторить действия по п.3-12 для второго образца.
14. Сравнить полученные значения. Сделать выводы.

Таблица 2.5.1. Результаты измерений.

Алюминиевый сплав			Сталь		
$P$ , кН	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \times 10^5$	$P$ , кН	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \times 10^5$


Таблица 2.5.2. Результаты испытаний

Вид сечения	Экспериментально полученная нагрузка потери устойчивости, Н	Первая критическая сила по формуле Эйлера, Н
Алюминиевый сплав		
Сталь		

## 2.11. Лабораторная работа №5. Определение зависимости сила - перемещение при докритическом и закритическом нагружении.

Цель работы: изучение зависимости продольного перемещения конца стержня от соотношения действующей силы и критической.

### Порядок выполнения.

1. Изучить п. 1.2 «Работа на стенде» и теоретические основы по п.2.1.
2. Установить на стенд образец из стали длиной  $L=500$  мм и диаметром  $d=5$  мм без ограничительных втулок, что соответствует шарнирному опиранию стержня.
3. Подключить разъем тензорезисторов к соответствующему разъему на измерительном блоке.
4. Включить электропитание измерительного блока. Подождать 5-10 минут для выхода электронных компонент блока на тепловой режим.
5. Произвести балансировку силоизмерителя и тензорезистров нажатием соответствующих кнопок на измерительном блоке.
6. Включить микрометрический индикатор кнопкой «ON» и обнулить его показания кнопкой «Zero».
7. Плавно вращая рукоятку приводного устройства по направлению хода часовой стрелки, начать нагружение образца, контролируя при этом значения усилия и деформаций по цифровым табло. В процессе нагружения записывать текущие значения усилия ( $P$ ), перемещения подвижной опоры ( $A$ ) и деформаций ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ) в таблицу 2.6.1 с шагом 5-6 единиц по деформациям. Нагружение проводить до значения

деформаций 60-70.

**ВНИМАНИЕ!** Обновление показаний цифровых табло происходит один раз в 2-3 с. Запрещено превышать значение деформаций  $80 \times 10^{-5}$  (показания цифрового табло «80») для образцов из стали, поскольку это может вызвать возникновение пластических деформаций в образце.

8. Разгрузить образец, вращая рукоятку приводного устройства против направления хода часовой стрелки. Выключить питание измерительного блока.

9. Отключить разъем тензорезисторов от измерительного блока, снять образец.

10. Построить зависимость перемещения подвижной опоры от сжимающего усилия. Проанализировать вид зависимости. Сделать выводы.

Таблица 2.6.1. Результаты измерений.

$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$	$P$ , кН	$\Delta$ , мкм

### Список использованной литературы.

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов. 14-е изд. / Н.М. Беляев - М.: Наука, 1965.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. - М.: Наука, 1970.
3. Груздев, А.С. Основы теории упругой устойчивости элементов автотракторных конструкций / А.С. Груздев, М.Н. Лукьянов, Н.Л. Осипов, М.Р. Рыбакова – М.: Университет машиностроения, 2014. – 124с.

Учебное издание

Груздев Александр Сергеевич,  
Осипов Николай Леонидович,  
Рыбакова Маргарита Романовна

Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по курсу  
«Устойчивость механических систем»

Под редакцией авторов

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским  
отделом Университета машиностроения

Подписано в печать 15.12.14. Формат 60х90 1/16. Бумага 80г/м<sup>2</sup>  
Гарнитура «Таймс». Ризография. Усл. печ. л.3,25  
Тираж 50 экз. Заказ № 125-14

Университет машиностроения  
107023, г.Москва, ул. Б.Семеновская, д.38.